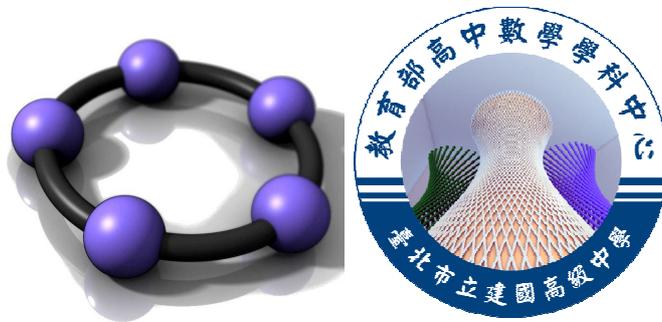


# Geogebra 研習講義



泰北高中

藍邦偉 老師

0709,2012

## 1. 軟體的簡介：

GeoGebra 是一套免費和跨平台的動態數學教育軟體。它是由美國佛羅里達州亞特蘭大學的數學教授 Markus Hohenwarter 及一個國際程式設計團隊所共同開發，設計的軟體，它是結合「幾何 Geometry」、「代數 Algebra」與「微積分」。目的在教導與學習學校數學。這套軟體曾經獲得許多項國際性的大獎，包括歐洲及德國教育軟體大獎。另一方面，GeoGebra 為一套動態的幾何系統。你可以用點、向量、線段、直線、多邊形、圓錐曲線、和函數來作圖，事後你還可以改變它們的屬性，並隨後動態修改。另一方面來說，你也可以直接輸入方程式或座標，所以 GeoGebra 也有處理變數的能力。例如數字、角度、向量、或是點座標。它也可以對函數作微分與積分，找出方程式的根或計算函數的極大極小值。因此 GeoGebra 視窗左邊有一個「代數區」，右邊有一個「幾何區」（也稱為「繪圖區」）。

## 2. 軟體使用前的準備：

要執行 GeoGebra 程式或觀看 GeoGebra 檔案前，請先確定你的電腦中已經安裝 Java 執行環境，否則將無法執行或觀看。你可以依你的作業系統與瀏覽器下載不同的 java，例如 32 位元的 win7 IE 或 64 位元的 win7 IE，java for Chrome，java for Mac 等等。

## 3. 如何在網頁上看 GeoGebra 檔：

通常放在網路上的多已經輸出成 Java Applet 形式，所以只要電腦有安裝 Java 執行環境，便可以在 IE 瀏覽器直接看 GeoGebra 製作的成品。較新版本的 Java 也有支援其他瀏覽器，如 Google Chrome。

但是若要看 GeoGebra 製作的原始檔(ggb 檔)時，你的電腦就必須有 GeoGebra 執行程式。

當然只要執行過一次 GeoGebra WebStart，你的電腦內便有直接看 ggb 檔的能力。

#### 4. 工具列簡介

圖示	名稱	使用方法
	移動	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 移動物件：以滑鼠拖曳就可以移動「自變物件」。</li> <li>2. 選取物件：用滑鼠左鍵按一下，就可以選取單一物件。</li> <li>3. 刪除物件：選取物件後，按Del刪除。</li> </ol>
	轉動	首先選取選轉的中心點，然後可以以此點為中心，用滑鼠拖曳自變物件來轉動它。
	紀錄到試算表	此工具能夠在物件移動的同時，並將該物件的變化數值紀錄在試算表區中，此工具僅能使用在數值、點、向量。
	新點	在繪圖區按下滑鼠左鍵以新增點。
	內點或邊點	
	附著/脫離點	
	交點	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 點選兩物件 ⇨ (盡可能)產生兩物件的所有交點。</li> <li>2. 點選兩物件的交點 ⇨ 只產生此一交點。</li> </ol>
	中心點	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 選兩點 ⇨ 找出其中點；</li> <li>2. 選一線段 ⇨ 找出其中點；</li> <li>3. 選一圓錐曲線 ⇨ 找出其中心。</li> </ol>
	複數	
	直線	選兩點 A 和 B 作直線，此線的方向向量即為 $(B-A)$
	線段(過兩點)	選兩點 A 和 B，並調整線段長度，即可在代數區中顯示線段長度。
	線段(指定起點與長度)	點選線段的起點 A，並在出現的視窗中指定想要的長度。
	射線(過兩點)	點選兩點 A 和 B，作出起點從 A 到 B 的射線，在代數區中即可看到相關直線的方程式。

	折線圖	
	向量(過兩點)	選取向量的起點和終點。
	向量(指定起點、向量)	選點 $A$ 及一向量 $v$ 以建立點 $B=A+v$ ，可以做出從 $A$ 到 $B$ 的向量。
	垂直線	點選出一直線 $g$ 和一點 $A$ ，產生一直線通過 $A$ 且垂直於 $g$ ，此線的方向向量即等於 $g$ 之法向量。
	平行線	點選出一直線 $g$ 和一點 $A$ ，可畫出一直線通過 $A$ 且平行於 $g$ ，此線的方向向量即為直線 $g$ 的方向向量。
	中垂線	通過一線段 $s$ 或兩點 $A$ 和 $B$ 的中點並垂直於此線段的直線，此線的方向即等於線段 $s$ 或 $AB$ 的法向量。
	角平分線	1. 選出三點 $A, B, C$ ，便作出以 $\angle ABC$ ( $B$ 為頂點) 的角平分線。 2. 選出兩條線，便作出所夾兩角的平分線。
	切線	1. 選一點 $A$ 及一圓錐曲線 $c$ ，便作出通過 $A$ 且切於 $c$ 的所有切線。 2. 選一線 $g$ 及一圓錐曲線 $c$ ，便作出平行於 $g$ 且切於 $c$ 的所有切線。 3. 選一點 $A$ 及一函數 $f$ ，便作出 $f$ 在 $x=x(A)$ 的切線。
	極線或徑線	1. 點選一點及一圓錐曲線以作出極線。 2. 點選直線或一向量及一圓錐曲線以作出徑線。
	迴歸線	1. 建立選取方塊使其包含點集裡頭的所有點。 2. 選取點的串列建立相對應於的最適直線。
	軌跡	點選一個會隨著點 $A$ 而變的點 $B$ ，然後點選 $A$ ，便畫出 $B$ 的軌跡。
	多邊形	標出至少三個點當做多邊形的頂點，然後再按下第一個點以圍成一多邊形，在代數區中可看見多邊形的面積。
	正多邊形	點選兩點 $A$ 和 $B$ ，並在出現的對話方塊中輸入一整數 $n$ ，即得到一個有 $n$ 個頂點的正多邊形 (包括點 $A$ 和 $B$ )
	剛體多邊形	

	向量多邊形	
	圓(指定圓心與一點)	點選出一點 M 和一點 P，可畫出一圓心為 M 且通過點 P 的圓，此圓的半徑即為 MP 的距離。
	圓(指定圓心與半徑數值)	點選圓心後，在出現的視窗中輸入半徑。
	圓(指定圓心，半徑長)	選取一線段或兩點作為半徑，然後點擊一點作為新圓的圓心。
	圓(過三點)	點選出三點 A,B,C，可畫出通過此三點的圓。若這三點在一直線上，此圓即退化為直線。
	半圓	點選兩點 A 和 B，在線段 AB 上作出一個半圓。
	圓弧(指定圓心與兩點)	點選三點 M, A 和 B，作出圓心為 M，起點為 A 終點為 B 的圓弧。
	圓弧(過三點)	點選三點作出通過此三點的圓弧。
	扇形(指定圓心與兩點)	點選三點 M, A 和 B，作出圓心為 M，起點為 A 終點為 B 的扇形。
	扇形(過三點)	點選三點作出通過此三點的扇形。
	橢圓	選取兩點作為橢圓的焦點，然後選定第三點在此橢圓上。
	雙曲線	選取兩點作為雙曲線的焦點，然後選定第三點在此雙曲線上。
	拋物線	選定一點和拋物線的準線。
	圓錐曲線(過五點)	點選五個點，作出通過此五點的圓錐曲線。
	測量角度	可測量出：1. 三點間的角度。2. 兩線段間的角度。3. 兩直線間的角度。4. 兩向量間的角度。5. 多邊形的所有內角。
	畫指定角	點選兩點 A,B，並於對話方塊中輸入角度的大小，此工具作出點 C 及角度 $\alpha$ ，其中 $\alpha$ 為角 ABC。
	測量距離	此工具可測量出兩點、兩直線、或一點與一直線的距離，亦可求

		出線段的長度及圓周。
	測量面積	測量出多邊形、圓、或橢圓的面積。
	計算斜率	測量出直線的斜率
	新增串列	
	線對稱	先選取進行線對稱的物件，然後點擊直線指定為對稱線。
	點對稱	先選取進行點對稱的物件，然後點擊點指定為對稱點。
	反演	此工具的功能可以讓一個點對一個圓進行反演。先選取進行反演的點，然後點擊圓指定為反演圓。
	旋轉	先選取進行旋轉的物件，然後點擊點指定為旋轉中心，在出現的對話視窗的文字方塊輸入旋轉角度。
	平移	先選取進行平移的物件，然後點擊平移的向量。
	伸縮	先選取進行伸縮的物件，再點擊伸縮中心，然後在出現的對話視窗的文字方塊輸入指定伸縮倍率。
	插入文字	產生靜態文字、動態文字、或 LaTeX 數學式。
	插入圖片	插入圖片
	手寫筆	
	判斷物件關係	點選兩物件以得知其關係。
	機率計算器	
	函數檢視器	
	數值滑桿	在繪圖區的任意位置按下滑鼠，可建立數值或角度的滑桿。可設定其最大值、最小值。
	勾選框	在幾何繪圖區點擊滑鼠，便產生一個顯示或隱藏物件的核選方塊。

	按鈕	
	輸入欄位	
	移動繪圖區	以滑鼠拖曳繪圖區來移動坐標系統的原點。
	放大	在繪圖區中任意處按下滑鼠以拉近視窗。
	縮小	在繪圖區中任意處按下滑鼠以拉遠視窗。
	顯示或隱藏物件	在啟動此工具後選取欲顯示或隱藏的物件。在切換到其他工具之後，物件的可見狀態便會改變。
	顯示或隱藏名稱	按下物件以顯示或隱藏其名稱。
	複製格式	選取想複製其樣式的物件，然後再點選其它物件。可將一物件的樣式(顏色、大小、線的樣式)複製到數個其他的物件。
	刪除物件	按下欲刪除的物件。

## 5. Geogebra 快捷輸入

alt- = -> not equals	alt-m -> mu
alt- + -> plus or minus	alt-o -> degree sign
alt-- -> superscript minus	alt-p -> pi
alt-< -> less than or equal	alt-s -> sigma
alt-> -> greater than or equal	alt-t -> theta
alt-, -> less than or equal	alt-w -> omega
alt.- -> greater than or equal	alt-0 -> to the power of 0
alt-a -> alpha	alt-1 -> to the power of 1
alt-b -> beta	alt-2 -> to the power of 2
alt-d -> delta	alt-3 -> to the power of 3
alt-e -> Euler e	alt-4 -> to the power of 4
alt-f -> phi	alt-5 -> to the power of 5
alt-g -> gamma	alt-6 -> to the power of 6
alt-u -> infinity	alt-7 -> to the power of 7
alt-i -> constant representing sqrt(-1)	alt-8 -> to the power of 8
alt-l -> lambda	alt-9 -> to the power of 9

## 6. 代數輸入

在GeoGebra中，我們可以使用視窗底部的「指令列」來直接輸入代數式，輸入完畢後記得按下Enter鍵執行代數式。下表為常用的代數式輸入方法：

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按Enter執行)
點坐標	$A(1,2)$	A=(1,2) 點坐標必須是 <u>大寫</u> 字母開頭
極坐標	$P[2,30^\circ]$	P=(2;30°) 點坐標必須是 <u>大寫</u> 字母開頭
複數坐標	$B(2+3i)$	B=2+3i 點坐標必須是 <u>大寫</u> 字母開頭
向量(點坐標表示)	$v = (1,3)$	v=(1,3) 向量必須是 <u>小寫</u> 字母開頭
向量(極坐標表示)	$p[1, \frac{\pi}{3}]$	p=(1;alt-p/3) 向量必須是 <u>小寫</u> 字母開頭
向量(複數坐標表示)	$q = -1+2i$	q=-1+2i 向量必須是 <u>小寫</u> 字母開頭

## 7. 高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 <b>Enter</b> 執行)
乘法	數字(式子)乘法 $\times$ 、向量內積 $\cdot$	* 或 <b>空白鍵</b>
乘法(數字)	$a = 5 \times 3 + 2012$	$a = 5*3+2012$
乘法(內積)	$(2,3) \cdot (-3,2)$	$(2,3)*(-3,2)$
乘法(複數)	$(2+3i) \times (3-2i)$	$(2+3i)*(3-2i)$
階乘	$5!$	$5!$
取出點的 x 坐標	取出點 P 的 x 坐標	$x(P)$
取出點的 y 坐標	取出點 P 的 y 坐標	$y(P)$
商數	整數 a 除以整數 b 的商數	$\text{Div}[a,b]$
餘數(模數)	整數 a 除以整數 b 的餘數	$\text{Mod}[a,b]$
最大公因數	整數 a 與整數 b 的最大公因數	$\text{GCD}[a,b]$
最小公倍數	整數 a 與整數 b 的最小公倍數	$\text{LCM}[a,b]$
絕對值	$ -23 $	$\text{abs}(-23)$
正負號(性質符號)		$\text{sgn}()$
根號		$\text{sqrt}()$
三次根號		$\text{cbrt}()$
0 到 1 的隨機數		$\text{random}()$
a 到 b 的隨機數	整數 a 與整數 b 之間的隨機數	$\text{Randombetween}(a,b)$
指數函數	$2^x$	$2^x$
指數函數	$e^x$	$\text{exp}(x)$
對數(以 e 為底)		$\text{ln}()$
對數(以 2 為底)		$\text{ld}()$
對數(以 10 為底)		$\text{lg}()$
正弦函數		$\text{sin}()$
餘弦函數		$\text{cos}()$
正切函數		$\text{tan}()$
餘切函數		$\text{cot}()$

正割函數		sec()
餘割函數		csc()
反正弦函數		asin()
反餘弦函數		acos()
反正切函數		atan()
上高斯函數	$[x]$	ceil()
下高斯函數	$[x]$	floor(x)
多項式	$y = 2x^2 - 4x + 3$	$y=2x^2-4x+3$
一次函數	$f(x) = 3x - 2$	$f(x)=-3x-2$
二次函數	$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$	$f(x)=2x^2+3x+1$
三次函數	$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 3$	$f(x)=-2x^3+4x^2-3$
最高公因式	求兩多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式	HCF[f(x),g(x)]
最低公倍式	求兩多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最低公倍式	LCM[f(x),g(x)]
$f(x)$ 的一階導函數	$f'(x)$	Derivative[f]
	$f'(x)$	Derivative[f(x)]
	$f'(x)$	$f'(x)$
$f(x)$ 的二階導函數	$f''(x)$	Derivative[f(x),2]
		$f''(x)$
$f(x)$ 的三階導函數	$f'''(x)$	Derivative[f(x),3]
		$f'''(x)$
$f(x)$ 的 $n$ 階導函數	$f^{(n)}(x)$	Derivative[f,n]
將 $f(x)$ 展開	將 $f(x)$ 的括號乘開	Expand[f(x)]
	展開 $(x+1)(x+2)(x+3)$	Expand[(x+1)(x+2)(x+3)]
	將多項式 $f(x)$ 展開	Polynomial[f(x)]
將 $f(x)$ 因式分解	將多項式 $f(x)$ 因式分解	Factor[f(x)]
	因式分解 $x^2 - 4x + 3$	Factor[x^2-4x+3]
插值多項式	過(1,2),(3,4)(4,-1)三點的二次多項式	Polynomial[(1,2),(3,4)(4,-1)]

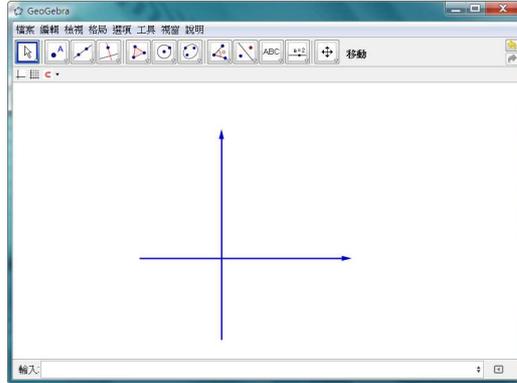
化簡 $f(x)$	將 $f(x)$ 化簡	Simplify[f(x)]
	化簡 $x+2x+3x$	Simplify[x+2x+3x]
	化簡 $\frac{\sin x}{\cos x}$	Simplify[sin(x) / cos(x)]
	化簡 $-2 \sin x \cos x$	Simplify[-2 sin(x) cos(x)]
泰勒展開式	$f(x)$ 對 $x=a$ 的 $n$ 次泰勒展開式	TaylorPolynomial[f(x), a, n]
分段函數	$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 3 \\ x^2 & x \geq 3 \end{cases}$	f(x) = If[x < 3, sin(x), x^2]
限制函數的定義域	$f(x) = x^2 + x + 1, -2 \leq x \leq 3$	f(x) = Function[x^2+x+1,-2,3]
上和	$f(x)$ 在 $[-2,3]$ 分割成 10 等份的上和	UpperSum[f(x),-2,3,10]
下和	$f(x)$ 在 $[-2,3]$ 分割成 10 等份的下和	LowerSum[f,-2,3,10]
$f(x)$ 的反導函數 常數為 0	$\int f(x) dx$	Integral[f(x)]
$f(x)$ 的定積分	$\int_{-2}^3 f(x) dx$	Integral[f(x),-2,3]
	$\int_{-2}^3 x^3 dx$	Integral[x^3,-2,3]
	$f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 的面積	Integral[f(x),g(x), a,b]
多項式 $f(x)$ 的反曲點	找出 $f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ 的反曲點	InflectionPoint[f]
多項式 $f(x)$ 的所有根	找出 $f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ 的所有根	Root[f]
牛頓法找函數 $f(x)=0$ 的一根	以牛頓法找出函數 $f(x)$ 以 $x=a$ 為起始值的一根	Root[f(x),a]
多項式 $f(x)$ 的極值	找出多項式 $f(x)$ 的所有極值發生的點	Extremum[f]
圓錐曲線 $c$ 的頂點		Vertex[c]
數列	列出 $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$ 的前十項	Sequence[(n,(1/2)^n),n,1,10]

## 實例製作

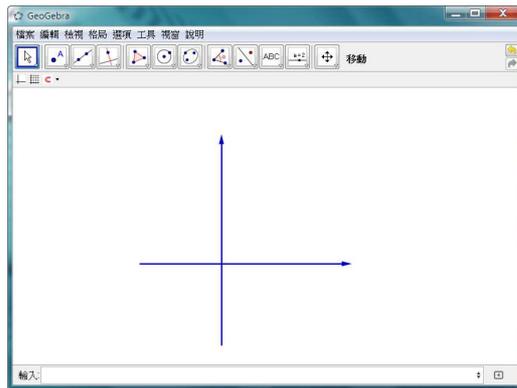
### 1. 座標軸的建立

①  $A=(-5,0)$  ,  $B=(8,0)$  ,  $C=(0,-5)$  ,  $D=(0,8)$

$u=Vector[A,B]$  ,  $v=Vector[C,D]$

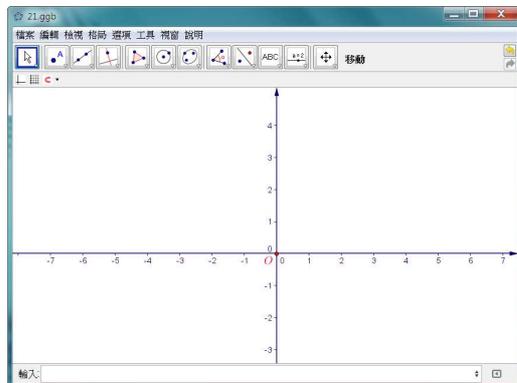


②  $u=Vector[(-5,0),(8,0)]$  ,  $v=Vector[(0,-5),(0,8)]$



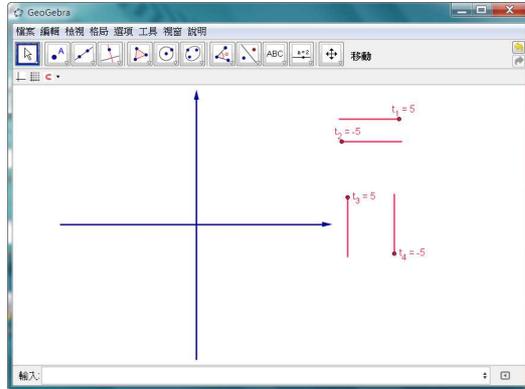
③  $u=Vector[(x(corner[1]),0),(x(corner[3]),0)]$

$v=Vector[(0,y(corner[1])),(0,y(corner[3]))]$  ,  $O=(0,0)$



④  $t_1=5$  ,  $t_2=5$  ,  $t_3=1$  ,  $t_4=1$

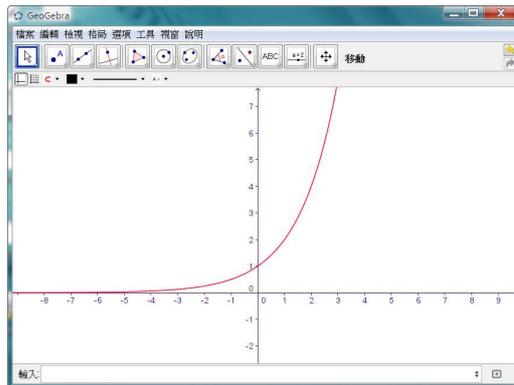
$u=\text{Vector}[(t_3,0),(t_1,0)]$  ,  $v=\text{Vector}[(0,t_4),(0,t_2)]$



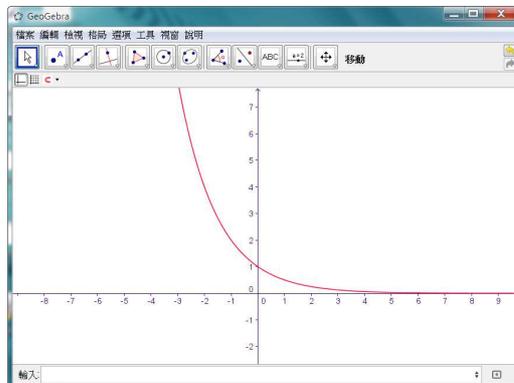
## 2. 函數與曲線繪圖

### (1) 指數函數

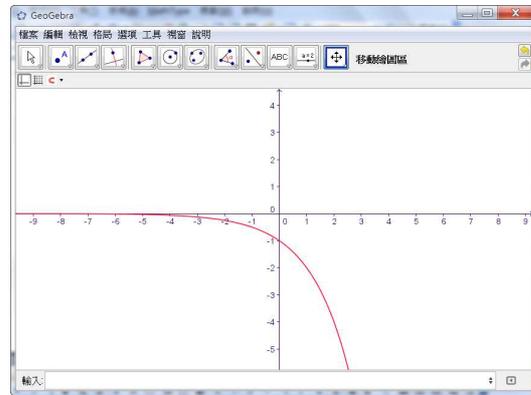
①  $f_1(x) = 2^x$  :  $f_1(x)=2^x$



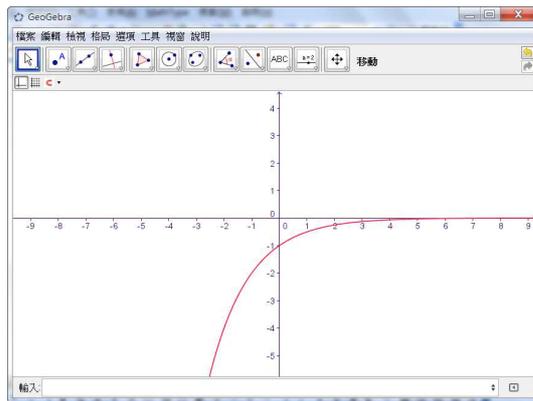
②  $f_2(x) = 2^{-x}$  :  $f_2(x)=2^{-x}$  或  $f_2(x)=f_1(-x)$



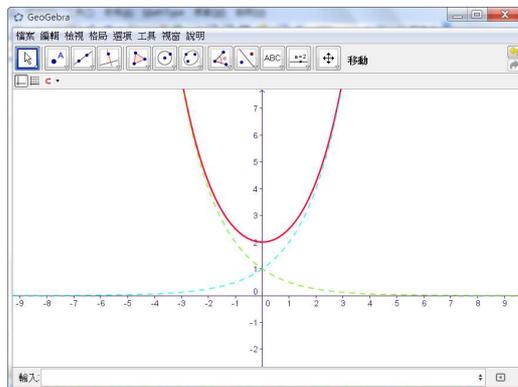
③  $f_3(x) = -2^x$  :  $f_3(x) = -2^x$  或  $f_3(x) = -f_1(x)$



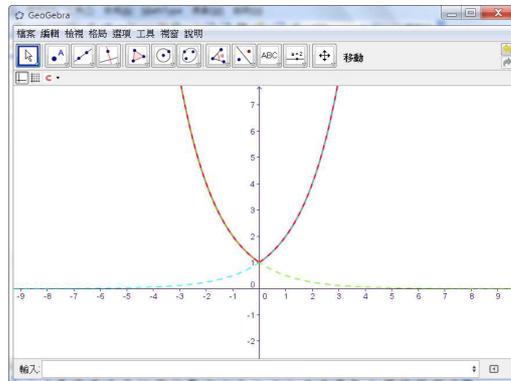
④  $f_4(x) = -2^{-x}$  :  $f_4(x) = -2^{-x}$  或  $f_4(x) = -f_1(-x)$



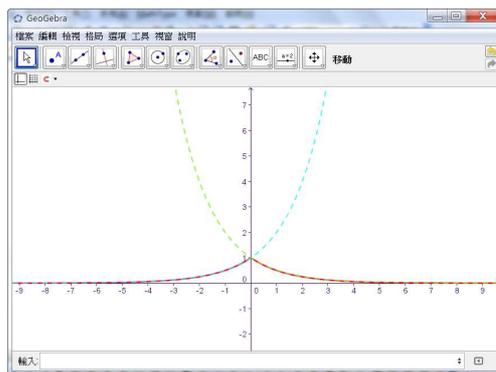
⑤  $f_5(x) = 2^x + 2^{-x}$  :  $f_5(x) = 2^x + 2^{-x}$



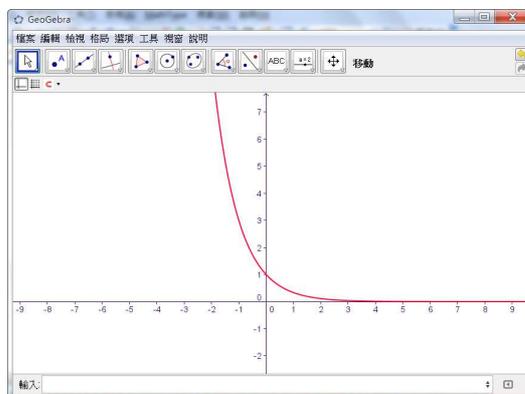
⑥  $f_6(x) = 2^{|x|}$  :  $f\_6(x)=2^{\text{abs}(x)}$



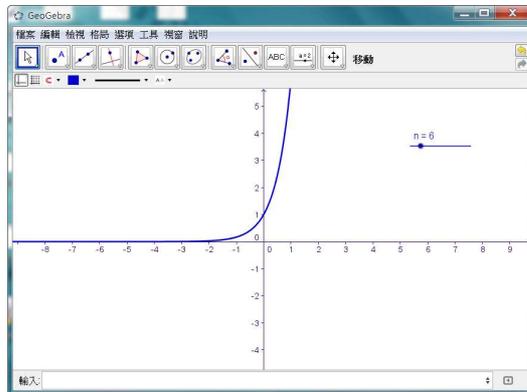
⑦  $f_7(x) = 2^{-|x|}$  :  $f\_7(x)=2^{(-\text{abs}(x))}$



⑧  $f_8(x) = (1/3)^x$  :  $f\_8(x)=(1/3)^x$

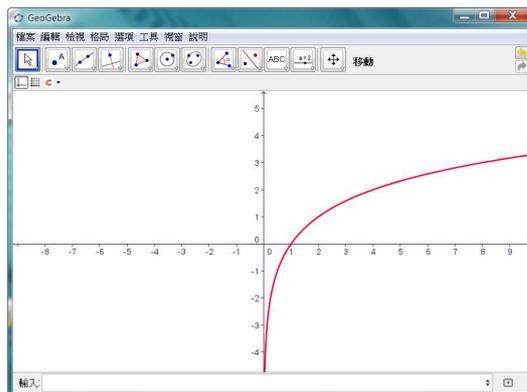


⑨  $f_9(x) = n^x$  :  $n=2$  ,  $f_9(x)=n^x$

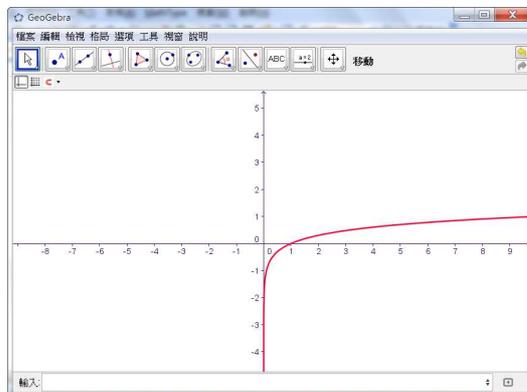


(2) 對數函數

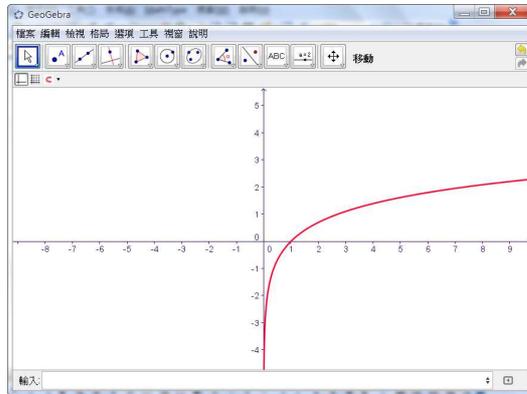
①  $f_1(x) = \log_2 x$  :  $f_1(x)=\lg(x)$  或  $f_1(x)=\lg(x)/\lg(2)$



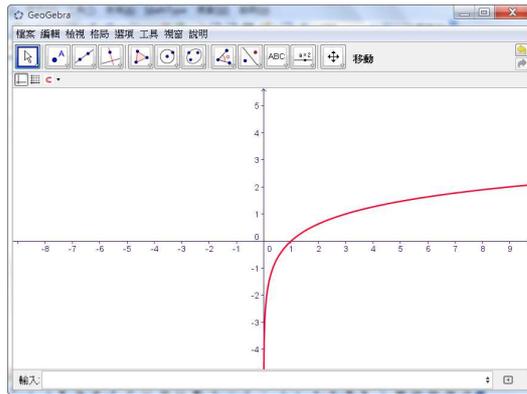
②  $f_2(x) = \log x$  :  $f_2(x)=\lg(x)$



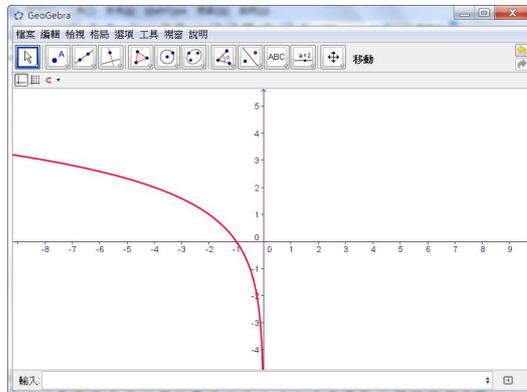
③  $f_3(x) = \ln x$  :  $f_3(x) = \ln(x)$



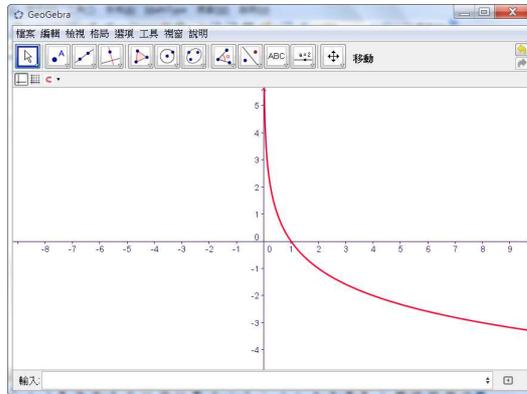
④  $f_4(x) = \log_3 x$  :  $f_4(x) = \lg(x)/\lg(3)$



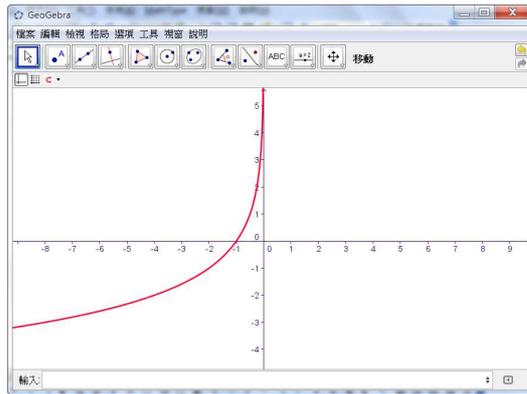
⑤  $f_5(x) = \log_2(-x)$  :  $f_5(x) = \lg(-x)$  或  $f_5(x) = f_1(-x)$



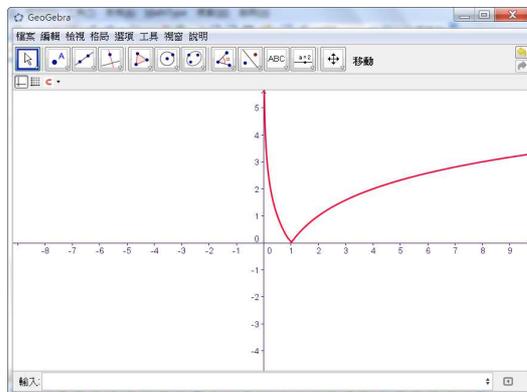
⑥  $f_6(x) = -\log_2 x$  :  $f\_6(x) = -\text{ld}(x)$  或  $f\_6(x) = -f_1(x)$



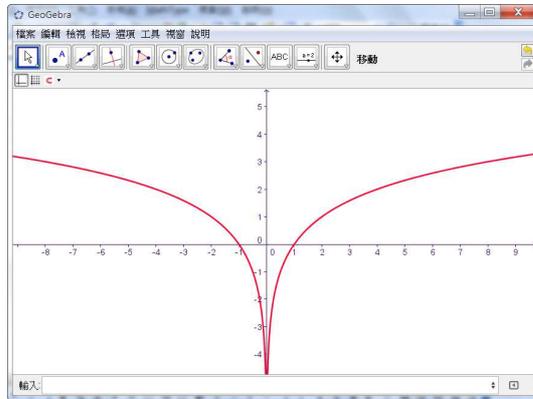
⑦  $f_7(x) = -\log_2(-x)$  :  $f\_7(x) = -\text{ld}(-x)$  或  $f\_7(x) = -f_1(-x)$



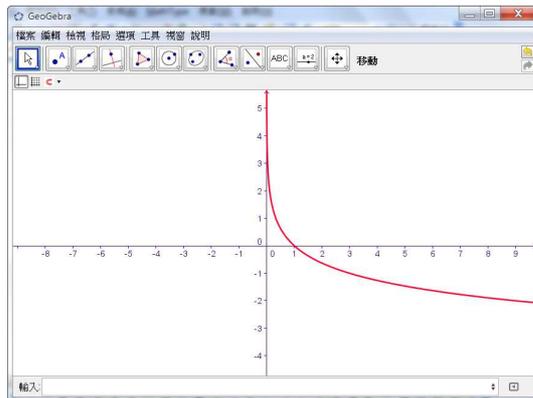
⑧  $f_8(x) = |\log_2 x|$  :  $f\_8(x) = \text{abs}(\text{ld}(x))$



⑨  $f_9(x) = \log_2 |x|$  :  $f_9(x) = \text{ld}(\text{abs}(x))$



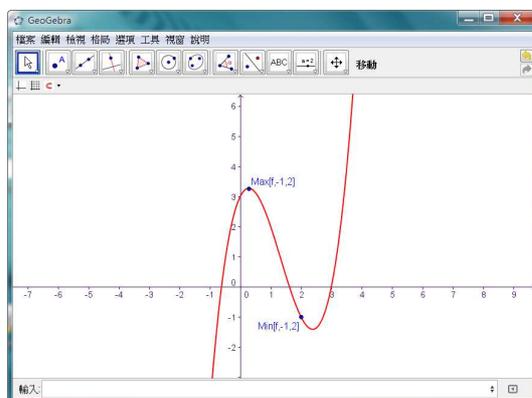
⑩  $f_{10}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$  :  $f_{10}(x) = \lg(x) / \lg(1/3)$



(3) 多項式函數

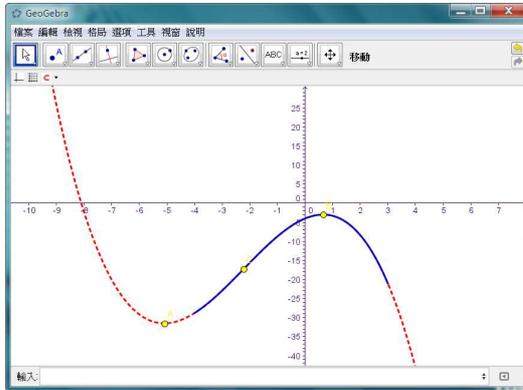
①  $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$  :

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$  ,  $\text{Max}[f_1, -1, 2]$  ,  $\text{Min}[f_1, -1, 2]$



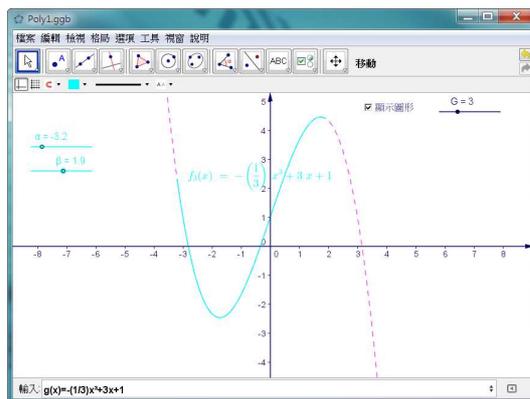
②  $f_2(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x - 4, -4 \leq x \leq 3$  :

$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x - 4$  ,  $f\_2(x) = \text{Function}[f, -3, 1]$  ,  
**Extremum[f\\_2]** , **InflectionPoint[f\\_2]**



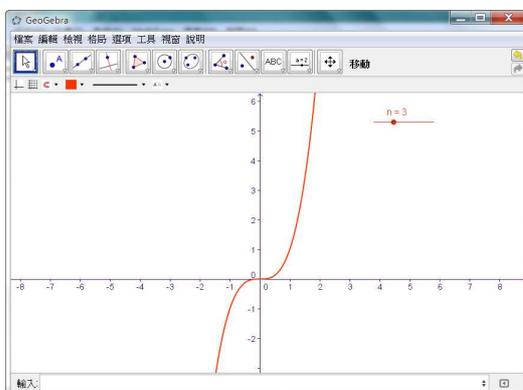
③  $f_3(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x + 4, \alpha \leq x \leq \beta$  :

$\text{alt} + \text{a} = -3$  ,  $\text{alt} + \text{b} = 2$  ,  $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x + 1$  ,  $f\_3(x) = \text{Function}[g, \alpha, \beta]$



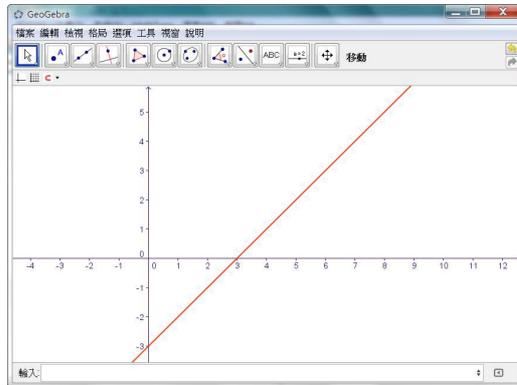
④  $f_4(x) = x^n$  :

$n = 2$  ,  $f\_4(x) = x^n$



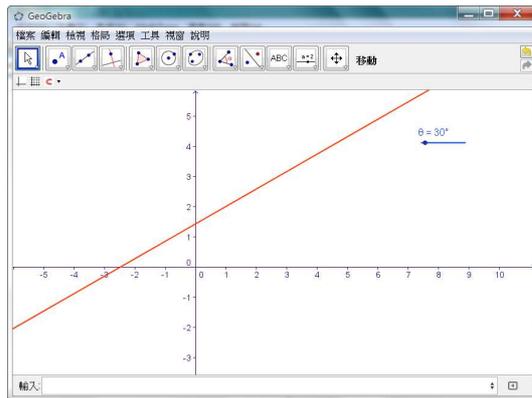
⑤  $x - y = 3$  :

$x - y = 3$  或  $y = x - 3$  或  $y + 1 = \tan(\text{alt} + p/4)(x - 2)$



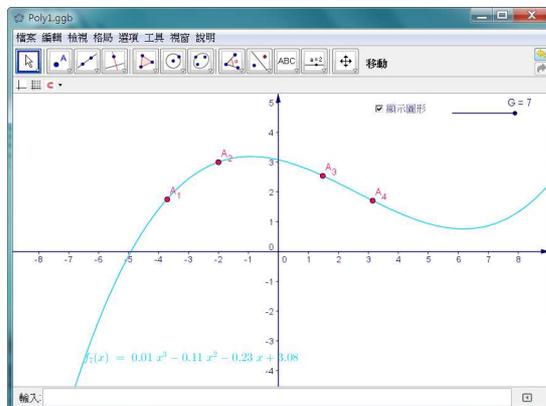
⑥  $y - 2 = \tan \theta(x - 1)$  :

$\text{alt} + t = 30$  alt + o ,  $y - 2 = \tan(\text{alt} + t)(x - 1)$



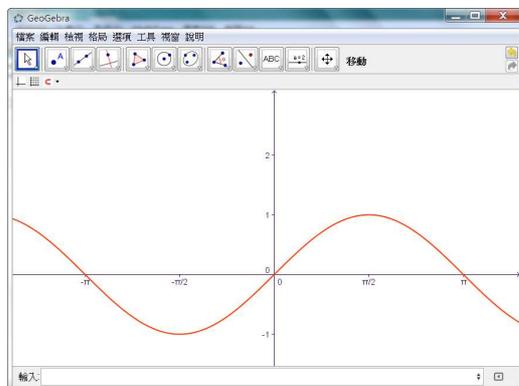
⑦ 通過 A,B,C,D 四點多項函數  $f_7(x)$  :

$f_7(x) = \text{polynomial}[A, B, C, D]$

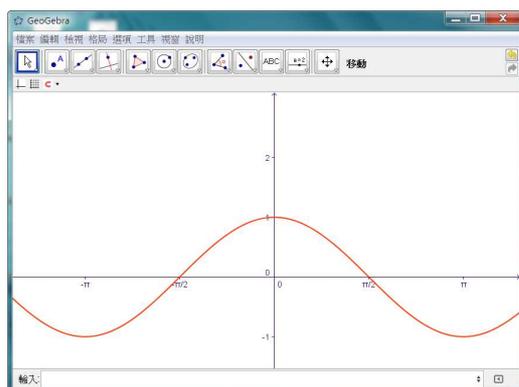


(4) 三角函數

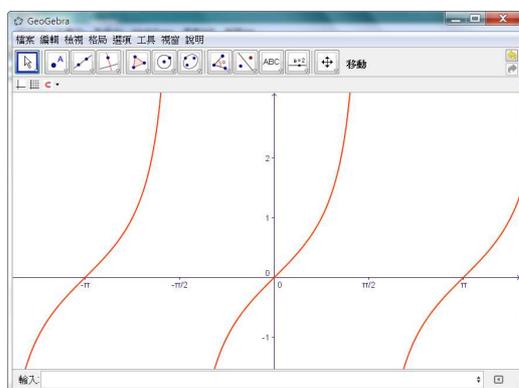
①  $f_1(x) = \sin x$  :  $f\_1(x)=\sin(x)$



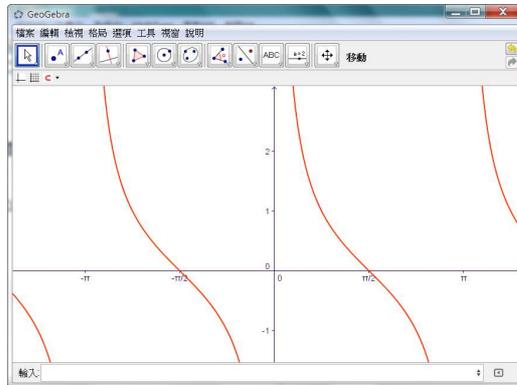
②  $f_2(x) = \cos x$  :  $f\_2(x)=\cos(x)$



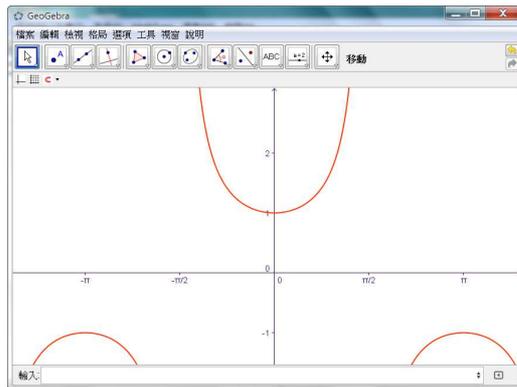
③  $f_3(x) = \tan x$  :  $f\_3(x)=\tan(x)$  或  $f\_3(x)=\sin(x)/\cos(x)$



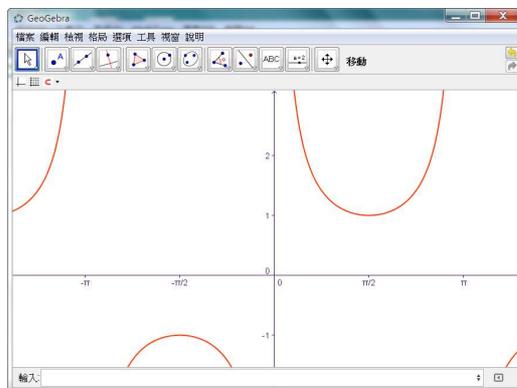
④  $f_4(x) = \cot x$  :  $f_4(x) = \cot(x)$  或  $f_4(x) = 1/\tan(x)$



⑤  $f_5(x) = \sec x$  :  $f_5(x) = \sec(x)$  或  $f_5(x) = 1/\cos(x)$

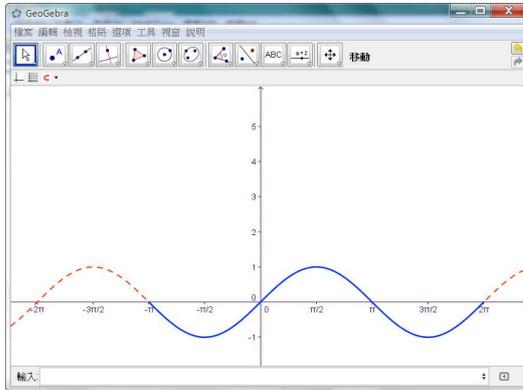


⑥  $f_6(x) = \csc x$  :  $f_6(x) = \csc(x)$  或  $f_6(x) = 1/\sin(x)$

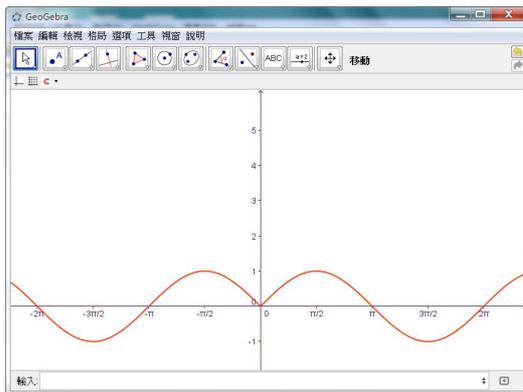


⑦  $f_7(x) = \sin x, -\pi \leq x \leq 2\pi$  :

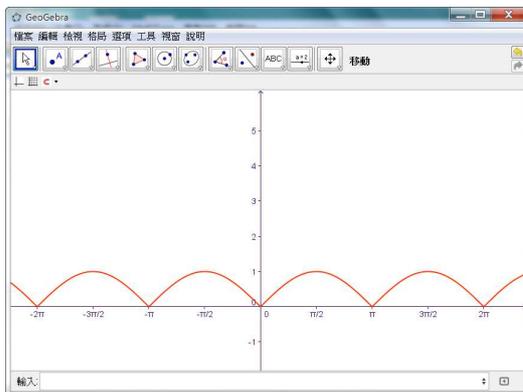
$g(x)=\sin(x)$  ,  $f_7(x)=\text{Function}[\sin(x),-\text{alt}+p,2\text{alt}+p]$



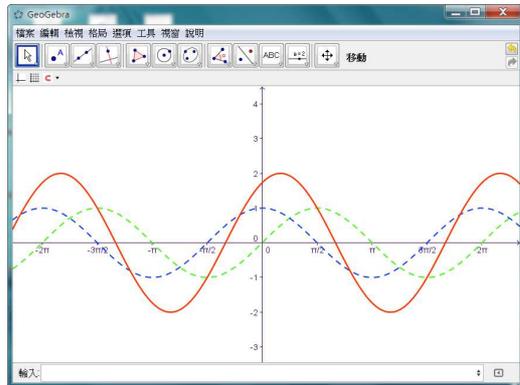
⑧  $f_8(x) = \sin |x|$  :  $f_8(x)=\sin(\text{abs}(x))$



⑨  $f_9(x) = |\sin x|$  :  $f_9(x)=\text{abs}(\sin(x))$

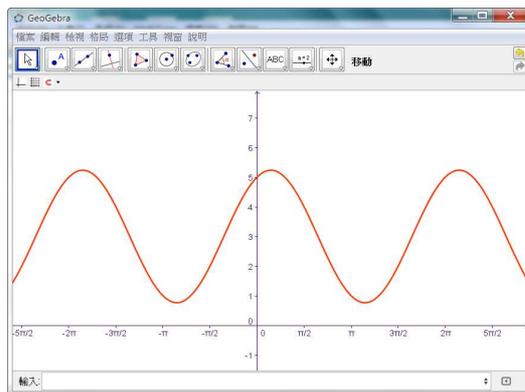


⑩  $f_{10}(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  :  $f_{10}(x) = \sin(x) + \text{sqrt}(3)\cos(x)$



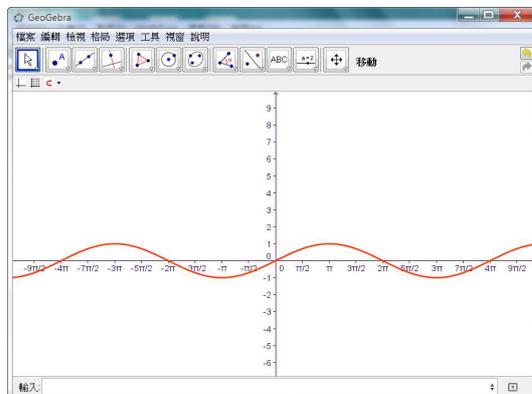
⑪  $f_{11}(x) = a \sin x + b \cos x + c$  :

$a=1$  ,  $b=2$  ,  $c=3$  ,  $f_{11}(x) = a \sin(x) + b \cos(x) + c$



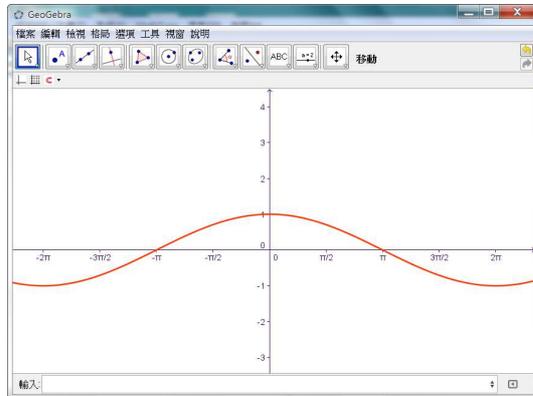
⑫  $f_{12}(x) = \sin(2x)$  :

$f_{12}(x) = \sin(2x)$

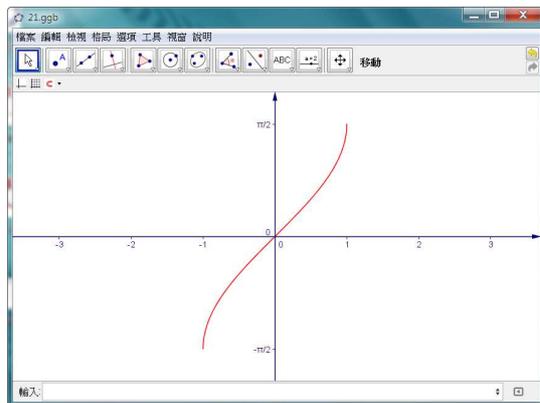


⑬  $f_{13}(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  :

$f_{13}(x) = \cos(x/2)$

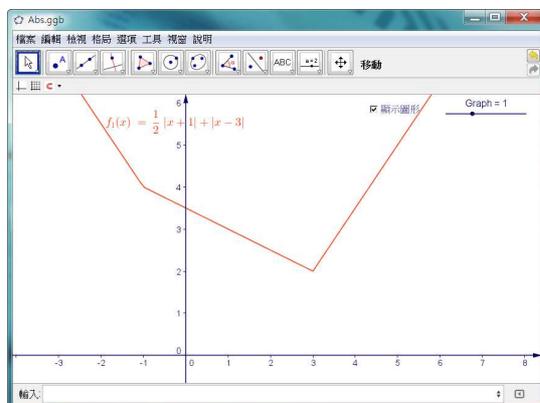


⑭ 反三角函數  $f_{14}(x) = \sin^{-1} x$  ;  $f_{14}(x) = \arcsin(x)$



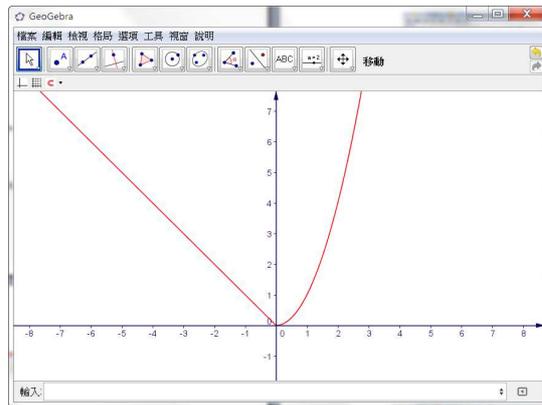
(5) 絕對值函數  $f_1(x) = \frac{1}{2}|x+1| + |x-3|$

$f_1(x) = (1/2) \text{abs}(x+1) + \text{abs}(x-3)$



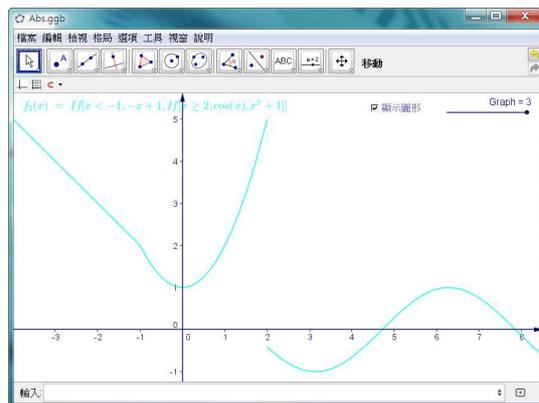
$$f_2(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \text{If}[x < 0, -x, x^2]$$



$$f_3(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1 \\ x^2+1, & -1 \leq x < 2 \\ \cos x, & x \geq 2 \end{cases}$$

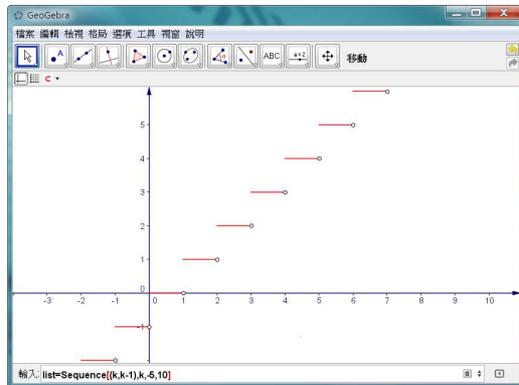
$$f_3(x) = \text{if}[x < -1, -x+1, \text{if}[x \geq 2, \cos(x), x^2+1]]$$



(6) 高斯函數

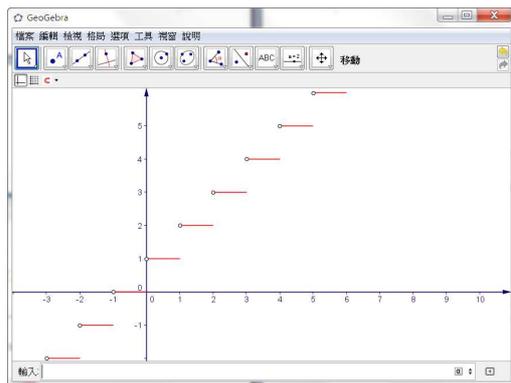
①  $f_1(x) = [x]$  ;  $f_1(x)=\text{floor}(x)$

$\text{list}_1=\text{Sequence}[(k,k-1),k,-5,10]$



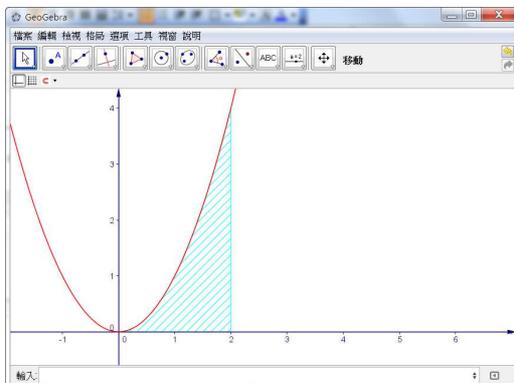
②  $f_2(x) = [x]$  ;  $f_2(x)=\text{ceil}(x)$

$\text{list}_2=\text{Sequence}[(k,k+1),k,-5,10]$

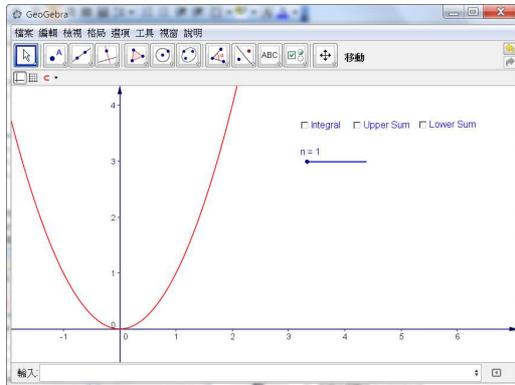


(7) 黎曼和與面積

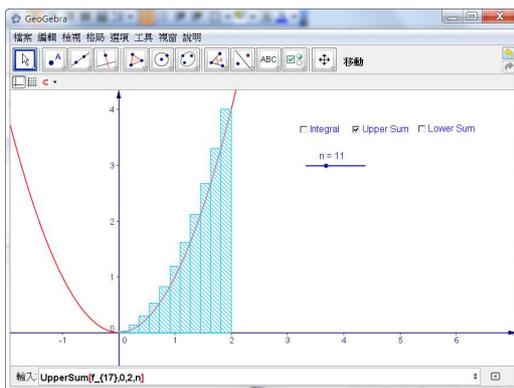
①  $f_1(x) = x^2, \int_0^2 x^2 dx$  ;  $f_1(x)=x^2$  ,  $R=\text{Integral}[f_1,0,2]$



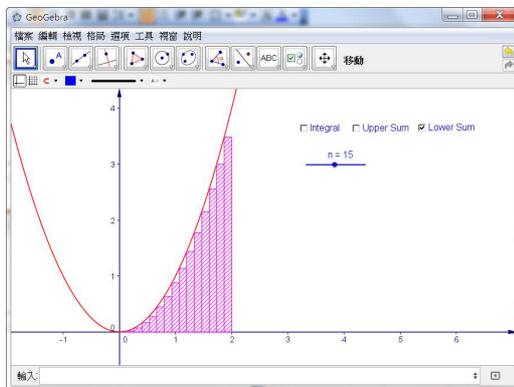
② 建立整數滑竿  $n$ ，勾選框 Integral,Upper Sum,Lower Sum



③ 上和  $U=Uppersum[f_1,0,2,n]$



④ 下和  $L=Lowersum[f_1,0,2,n]$

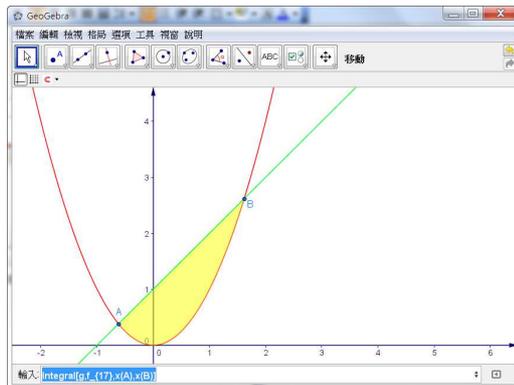


⑤ 求  $y = x^2$  與  $y = x + 1$  兩函數所圍的面積

$$L: g_1(x) = x + 1$$

$\text{Intersect}[f_1, g]$

$\text{Integral}[g, f_1, x(A), x(B)]$



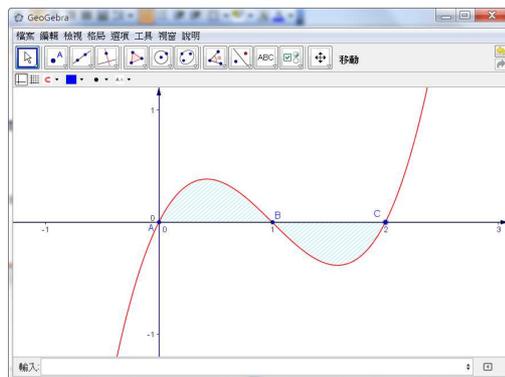
⑥

$$f_2(x) = x(x-1)(x-2)$$

$$g_2(x) = 0$$

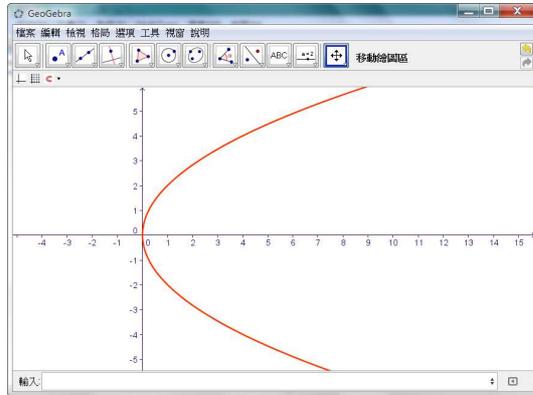
$\text{Intersect}[f_2, g_2]$

$\text{IntegralBetween}[f_2, g_2, x(C), x(E)]$



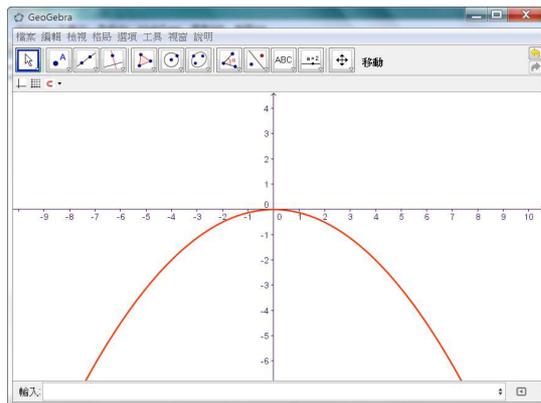
(8) 二次曲線

①  $\Gamma_1 : y^2 = 4x$  : alt+shift+g\_1:y alt+2 =4x 或 Parabola[(1,0),x=-1]



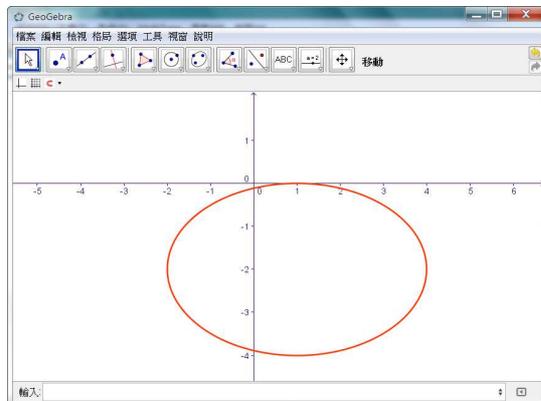
②  $\Gamma_2 : x^2 = -8y$  :

alt+shift+g\_2:x alt+2 =-8y 或 F(0,-2), L:y=2, Parabola[F,L]



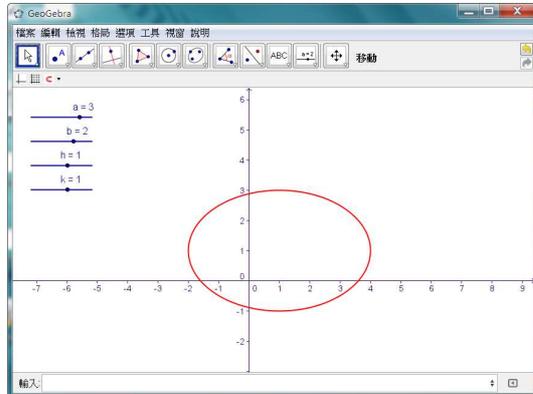
③  $\Gamma_3 : \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$  :

alt+shift+g\_3:(x-1)^2/9+(y+2)^2/4=1 或 Ellipse[F,F',a] 或 Ellipse[F,F',P]



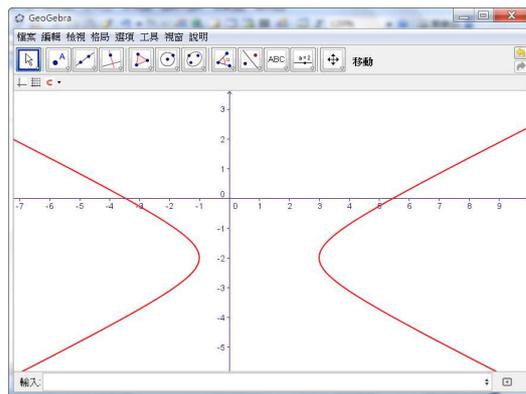
④  $\Gamma_4 : \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 :$

$h=1$  ,  $k=1$  ,  $a=3$  ,  $b=2$  , **alt+shift+g\_4:  $(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2=1$**



⑤  $\Gamma_5 : (x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 4 :$  **alt+shift+g\_5:  $(x-1)^2 - 4(y+2)^2=4$**  或

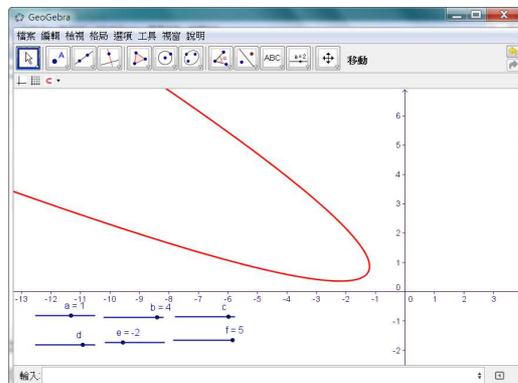
**Hyperbola[F,F',a]** 或 **Hyperbola[F,F',P]**



⑥  $\Gamma_6 : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 :$

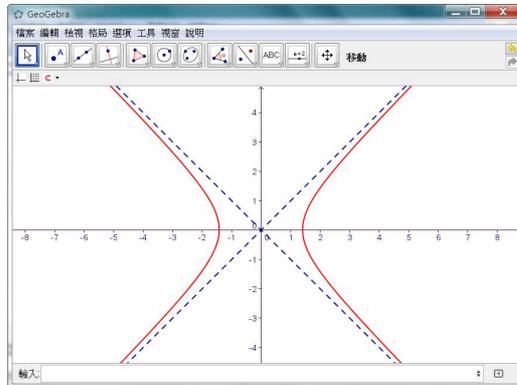
$A=1$  ,  $B=4$  ,  $C=4$  ,  $D=3$  ,  $E=-2$  ,  $F=5$  ,

**alt+shift+g\_6:  $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$**



⑦  $\Gamma_7: x^2 - y^2 = 2$  與其漸近線：

`alt+shift+g_7:x^2-y^2=2` , `Asymptote[alt+shift+g_7]`

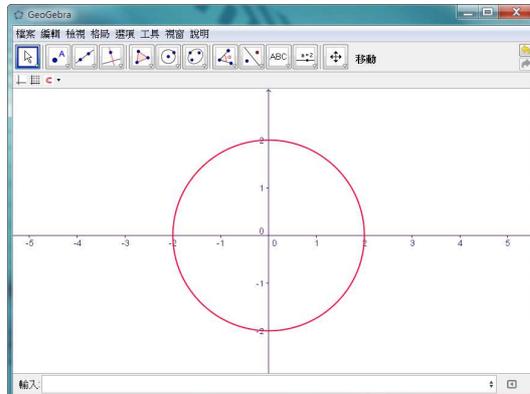


⑨

(9) 參數函數

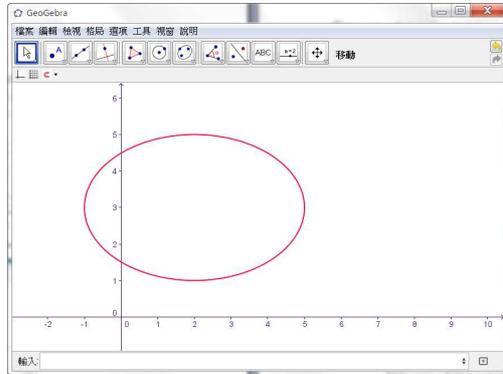
①  $C_1: x^2 + y^2 = 4$  :

`C_1:Curve[2 cos(t),2 sin(t),t,0,2π]`



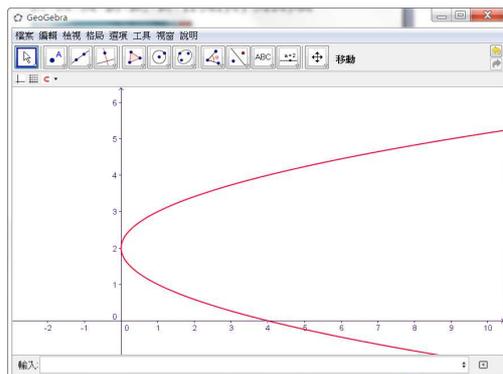
$$\textcircled{2} C_2 : \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 :$$

**C\_2: Curve[2+3 cos(t),3+2 sin(t),t,0,2 alt + p]**



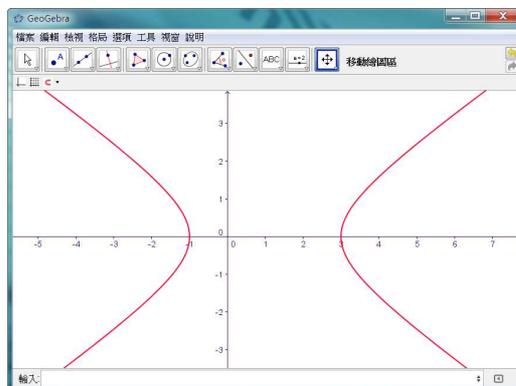
$$\textcircled{3} C_3 : (y-2)^2 = 4x :$$

**C\_3:curve[t^2,2+t,t,-10,10]**



$$\textcircled{4} C_4 : \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1 :$$

**C\_4: curve[1+2sec(t),sqrt(2)tan(t),t,0,2 alt+p]**



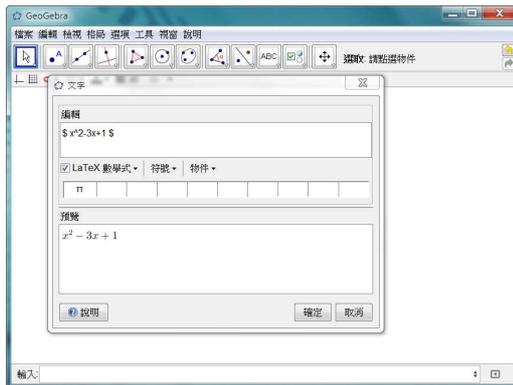
⑤

3.

#### 4. 調整漂亮的文字

為了讓圖形搭配漂亮的數學式子與文字，通常都是在 Word 上進行排版，同時搭配方程式編輯器(mathtype)即可。但是 GeoGebra 不支援方程式編輯器，所以必須仰賴 LaTeX 的文字排版語法來搭配使用，才能有較漂亮的數學式子與效果。但在 Geogebra4.0 後，文字更簡單了。

##### (1) 靜態文字



LaTeX 數學式

符號

##### (2) 動態文字

物件

#### 5. 進階選項

(1) 顏色

(2) 樣式

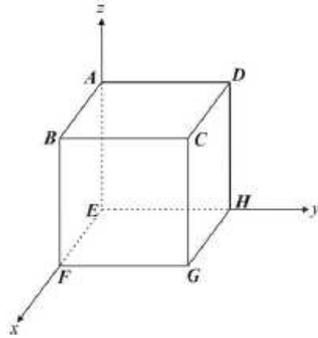
(3) 圖層

6. 3D 座標架的建立：

- (1) 做角度滑竿  $\alpha, 0^\circ$  到  $360^\circ$ ，增量  $1^\circ$
- (2) 做角度滑竿  $\beta, 0^\circ$  到  $360^\circ$ ，增量  $1^\circ$
- (3) 任選一新點  $O$  作為空間座標系的原點
- (4) 作點  $X_{\{\text{unit}\}}=O+(\cos(\alpha),\sin(\alpha)\cos(\beta))$
- (5) 作點  $Y_{\{\text{unit}\}}=O+(-\sin(\alpha),\cos(\alpha)\cos(\beta))$
- (6) 作點  $Z_{\{\text{unit}\}}=O+(0,\sin(\beta))$
- (7) 作向量  $u=\text{Vector}[O,X_{\{\text{unit}\}}]$
- (8) 作向量  $v=\text{Vector}[O,Y_{\{\text{unit}\}}]$
- (9) 作向量  $w=\text{Vector}[O,Z_{\{\text{unit}\}}]$
- (10) 作數值滑竿  $L$ ，範圍為 1 至 10，增量為 1
- (11) 作向量  $a=\text{Vector}[O-L*u,O+L*u]$
- (12) 作向量  $b=\text{Vector}[O-L*v,O+L*v]$
- (13) 作向量  $c=\text{Vector}[O-L*w,O+L*w]$
- (14) 插入文字  $x$ ，位置  $O+L u$
- (15) 插入文字  $y$ ，位置  $O+L v$
- (16) 插入文字  $z$ ，位置  $O+L w$
- (17) 作多邊形  $\text{Polygon}[O+L u+L v,O-L u+L v,O-L u-L v,O+L u-L v]$
- (18) 勾選框：單位向量, 座標軸,  $xy$  平面

## 7. 空間物件實例

9. 如圖所示，正立方體的邊長為 2，其中點  $E$  為原點，點  $F$ 、點  $H$ 、點  $A$  的坐標分別為  $(2,0,0)$ 、 $(0,2,0)$ 、 $(0,0,2)$ 。令  $\Omega$  表示四面體  $CBGD$  與四面體  $BAFC$  相交所形成的四面體。請選出正確的選項。



- (1)  $\Omega$  有一頂點坐標為  $(1,1,2)$
- (2)  $\Omega$  有一稜線其方向向量為  $(1,0,-1)$
- (3)  $\Omega$  有兩個側面互相垂直
- (4)  $\Omega$  僅有一個側面是正三角形
- (5)  $\Omega$  的體積為  $\frac{2}{3}$

(註：四面體的體積為  $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$ )

$$A = O + 2w$$

$$B = O + 2u + 2w$$

$$C = O + 2u + 2v + 2w$$

$$D = O + 2v + 2w$$

$$E = O$$

$$F = O + 2u$$

$$G = O + 2u + 2v$$

$$H = O + 2v$$

製作正立方體

製作四面體  $CBGD$

製作四面體  $BAFC$

你能找到  $B, C$  之外另外兩個點的座標嗎？

$$K = (a, b, c) \rightarrow K = O + a u + b v + c w$$

$$J = (d, e, f) \rightarrow J = O + d u + e v + f w$$

連  $\overline{MB}, \overline{MC}, \overline{JB}, \overline{JC}$