機率之取球問題

藍邦偉老師

EX.1

一袋中有 6 個白球 4 個紅球，隨機從中抽取 3 球，若 $P(A)$ 表抽中 2 白球 1 紅球的機率，$P(B)$ 表至少抽中 1 個白球的機率。試求 $P(A)$ 與 $P(B)$。

Sol

$$P(A)=\frac{C_2^6C_1^4}{C_3^{10}}=\frac{15\times4}{\frac{10\times9\times8}{1\times2\times3}}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{C_1^6C_2^4+C_2^6C_1^4+C_3^6}{C_3^{10}}=\frac{6\times6+15\times4+20}{120}=\frac{29}{30}$$

$$P(B)=1-P(B')=1-\frac{C_3^4}{C_3^{10}}=1-\frac{4}{120}=\frac{29}{30}$$

EX.2

一袋中有 6 個白球 4 個紅球，每次隨機從中取 1 球，取後不放回，若 $P(A)$ 表抽中 2 白球的機率，$P(B)$ 表 2 球同色的機率。試求 $P(A)$ 與 $P(B)$。

Sol：

$$P(A)=\frac{C_1^6}{C_1^{10}}\times\frac{C_1^5}{C_1^9}=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\underset{\mathrm{R}}{\frac{6}{10}}\times\underset{\mathrm{R}}{\frac{5}{9}}+\underset{\mathrm{W}}{\frac{4}{10}}\times\underset{\mathrm{W}}{\frac{3}{9}}=\frac{7}{15}$$

EX.3

一袋中有 6 個白球 4 個紅球，每次隨機從中取 1 球，取後放回，若 $P(A)$ 表抽中 2 白球的機率，$P(B)$ 表 2 球同色的機率。試求 $P(A)$ 與 $P(B)$。

Sol：

$$P(A)=\underset{W}{\frac{6}{10}}\times\underset{W}{\frac{6}{10}}=\frac{9}{25}$$

$$P(B)=\underset{W}{\frac{6}{10}}\times\underset{W}{\frac{6}{10}}+\underset{R}{\frac{4}{10}}\times\underset{R}{\frac{4}{10}}=\frac{13}{25}$$

$EX.4$

一袋中有 4 個白球 6 個紅球，每次隨機從中取 1 球，取後不放回，取完為止。若 $P(A)$ 表第 3 次抽中白球的機率。試求 $P(A)$。

Sol ：

法一、

樣本空間：

把十顆球編上 1 號到 10 號，將球一顆顆取出來排成一列，考慮到取球時的先後次序，因此每一種取法對應一種排列，故共有 $10!$ 種排列方式。

事件 A 發生的情形：

我們把第 3 個位置放一顆白球，其他 9 個位置把剩下的 9 個球任意排列。共有 $C_1^4 \times 9!$ 種排法。故：

$$P(A) = \frac{C_1^4 \times 9!}{10!} = \frac{2}{5}$$

法二、

樣本空間：

視為 10 個球只有顏色的區別，而無其他區別，因此不考慮取球的先後次序，將 10 個球排成一列，其中 4 個位置放白球，6 個位置放紅球，故共有 $\frac{10!}{6!4!}$ 種放法。事件 A 發生的情形：

我們把第 3 個位置放一顆白球，然後在剩下的 9 個位置放 3 個白球 6 個紅球，這種放法有 $\frac{9!}{3!6!}$ 種。故：

$$P(A) = \frac{\frac{9!}{6!3!}}{\frac{10!}{6!4!}} = \frac{2}{5}$$

法三、

樣本空間：

只考慮前 3 次的取球情形，每個球仍編有不同的號碼，因此需考慮取球的先後順

序，這相當於在 10 個數字中任取 3 個不同的數字排列，共有 P_3^{10} 種方法。

事件 A 發生的情形：

先在 4 個白球中任取一個排在第 3 位，然後在剩下 9 個球中任取 2 球排在前 2 位，這種排法共有 $4\times P_2^9$ 種。

$$P(A)=\frac{C_1^4\times P_2^9}{P_3^{10}}=\frac{2}{5}$$

法四、

樣本空間：

只考慮第 3 次取球，每個球仍編有不同的號碼，因為每個球都有相同的機會被放在第 3 個位置，10 個不同的球有 10 種放法。

事件 A 發生的情形：

在 4 個白球中有 1 個被放在第 3 個位置，故有 4 種放法。

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

法五、

考慮第三次取得白球之機率即第一次取得白球之機率，即：

$$P(3rd\quad W)=\underset{w}{\frac{4}{10}}\underset{w}{\frac{3}{9}}\underset{w}{\frac{2}{8}}+\underset{w}{\frac{4}{10}}\underset{r}{\frac{6}{9}}\underset{w}{\frac{3}{8}}+\underset{r}{\frac{6}{10}}\underset{w}{\frac{4}{9}}\underset{w}{\frac{3}{8}}+\underset{r}{\frac{6}{10}}\underset{r}{\frac{5}{9}}\underset{w}{\frac{4}{8}}=\frac{288}{720}=\frac{2}{5}=P(1st\quad W)$$

以上這五種解法得到相同的結果，注意此結果與第幾次取到白球無關，而四種不同的方法都考慮到兩個問題：

(1) 儘管不同的取法取到不同的樣本空間，但是同一個樣本空間中樣本點發生的機會均相同。

(2) 在計算樣本空間中元素的個數與事件 A 中元素的個數需在同一個樣本空間中討論。

我國的抽籤可視為本例的一個應用。由此說明中籤的機率相等，與抽籤的先後次序無關。