

# 高一第二學期學習共同體課程設計與數學學習單

## 數學單元第三章機率取球問題

臺北市立建國高中李宗憲 楊希聰 蔡韋弘 陳珮如 曾政清老師

### 壹、前言：

十二年國民基本教育的實施，促使臺灣教育面臨新的變革與挑戰。教育工作者正積極思索，如何以學習者為中心的教學，來提升學生的學習效能；特別是面對差異化的教學實施，來追求高品質的教與學更是當前教育的重要課題。日前日本東京大學佐藤學教授倡導以「學習共同體」授課方式，來積極關注課堂學習中，不同程度學生的學習參與及學習表現，更激勵第一線教師的自我省思與團隊合作分享，並進行教育哲學的範例轉移（Paradigm Shifts in Educational Philosophy）。建國高中領先計畫，結合教師實際授課經驗，擬發展實際的教學模式與教師準備策略。尤其是如何結合專業社群推動「學習共同體」課程設計與創新，以活化課堂教學構，使學生能主動學習、樂於學習且精於學習。

本次課程設計的主題機率單元，一直是數學世界中最為實用且有趣的知識體系。根據近幾年大學入學考試中心統計分析大學學測考試結果，發現機率是高中學生普遍認為最困難的學習單元之一。尤其許多問題的解法在教師主講的傳統授課模式下，比較不容易讓學生了解。因此本次課程設計希望以學生學習為中心，結合 HOP、STEP、JUMP 三部曲學習單的研發，結合一題多解的思考，能引領學生廣泛思考討論與分享，以有效提升學生的學習成效。

### 貳、課程設計：

一、學生 HOP:透過課程綱要與課本佈題，一起複習舊經驗。

題目 1.一袋中有 5 個大小相同的球，其中黑球 3 個，白球 2 個，試問

- (1)從中任取一球，求取到黑球的機率？
- (2)從中同時取出 2 球，求兩球都是黑球的機率？
- (3)取一球後不放回，再取一球，求兩球都是黑球的機率？

解：(1) 從中任取一球，求取到黑球的機率= $\frac{3}{5}$

(2) 從中同時取出 2 球，求兩球都是黑球的機率= $\frac{C_2^3}{C_2^5} = \frac{3}{10}$

(3) 取一球後不放回，再取一球，求兩球都是黑球的機率= $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

### 二、老師講解

設一袋中有  $n$  支籤其中有  $r$  支有獎，每支籤被抽中的機會均等。

如果甲乙丙三人依次抽一支，取後不放回；試證明甲乙丙三人中獎的機率相同

證明：(方法一) 樹狀圖分析

$$P(\text{甲}) = \frac{r}{n}$$

$$P(\text{乙}) = P(\text{甲} \cap \text{乙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙}) = \frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1} + \frac{n-r}{n} \cdot \frac{r}{n} = \frac{r}{n} \cdot \left( \frac{r-1}{n-1} + \frac{n-r}{n-1} \right) = \frac{r}{n}$$

$$P(\text{丙}) = P(\text{甲} \cap \text{乙} \cap \text{丙}) + P(\text{甲} \cap \text{乙}' \cap \text{丙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙} \cap \text{丙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙}' \cap \text{丙}) = \frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1} \cdot \frac{r-2}{n-2} + \frac{n-r}{n} \cdot \frac{r}{n-1} \cdot \frac{r-1}{n-2} + \frac{r}{n} \cdot \frac{n-r}{n-1} \cdot \frac{r-1}{n-2} + \frac{n-r}{n} \cdot \frac{n-r-1}{n-1} \cdot \frac{r}{n-2}$$

$$= \frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1} \cdot \left( \frac{r-2}{n-2} + \frac{n-r}{n-2} \right) + \frac{n-r}{n} \cdot \frac{r}{n-1} \cdot \left( \frac{r-1}{n-2} + \frac{n-r-1}{n-2} \right)$$

$$= \frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1} + \frac{n-r}{n} \cdot \frac{r}{n-1} = \frac{r}{n} \cdot \left( \frac{r-1}{n-1} + \frac{n-r}{n-1} \right) = \frac{r}{n}$$

故可得知甲乙丙三人抽中的機率相等 (均為  $\frac{r}{n}$ )

(方法二)

可視為將此  $n$  支籤排成一列，再由甲乙丙等人依順序取對等順序的籤設第  $i$  個位子排中獎籤的機率為  $p_i$

$$\text{則 } p_i = \frac{1 \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}} = \frac{r}{n}$$

故知每人抽中獎籤的機率均相等 (皆為  $\frac{r}{n}$ )

### 三、學生 STEP: 蒐集重要觀念或迷思概念，設計啟蒙問題進行小組探究。

題目 2: 一袋中有 3 黑球，2 白球，今從袋中每次取一球不放回，求黑球先取完之機率?

解: (方法一)

黑球先取完之情況，就是把 3 黑球，2 白球排成一列，而最後一顆球必為白球。

即最後一顆為白球，前 4 顆球為 1 白 3 黑任意排列。

$$\text{黑球先取完之機率} = \frac{\frac{4!}{3!2!}}{\frac{5!}{3!2!}} = \frac{4}{5} = \frac{2}{5}。$$

(方法二)

$$\text{黑球先取完之機率} = \text{即思考白球排在最後一顆機率} = \frac{2 \text{白球}}{5 \text{顆球}} = \frac{2}{5}。$$

### 四、老師可邀請學生上台分享思路與解法~

### 五、學生 JUMP: 參考國內外競賽試題(如奧林匹亞、全國競賽)、科展研究主題

或結合檢定試題(如 AMC 或 PISA)設計各類型問題佈題挑戰。

題目 3: 一袋中有 6 紅球，5 白球，4 黑球，今從袋中每次取一球不放回，求黑球最先取完之機率?

解答: (方法一) 排列組合

討論: 最後一個是白球且黑球先取完或最後一個是紅球且黑球先取完的情形:

(1) 最後一個是白球且黑球先取完:

先任取一個白球放在最後，接著將剩下白球任排，再來任取一個紅球放在後面白球的前面(ex: 紅白、

紅白白、紅白白白)，最後將剩下 9 個任意排列方法數： $C_1^5 P_4^{14} C_1^6 \times 9!$

(2)最後一個是紅球且黑球先取完的情形：

先取一個紅球放最後，接著將剩下紅球任排，再來任取一個白球放在後面紅球的前面(ex：白紅、白紅紅、白紅紅紅)，最後將剩下 8 個任意排列方法數： $C_1^6 P_3^{14} C_1^5 \times 8!$

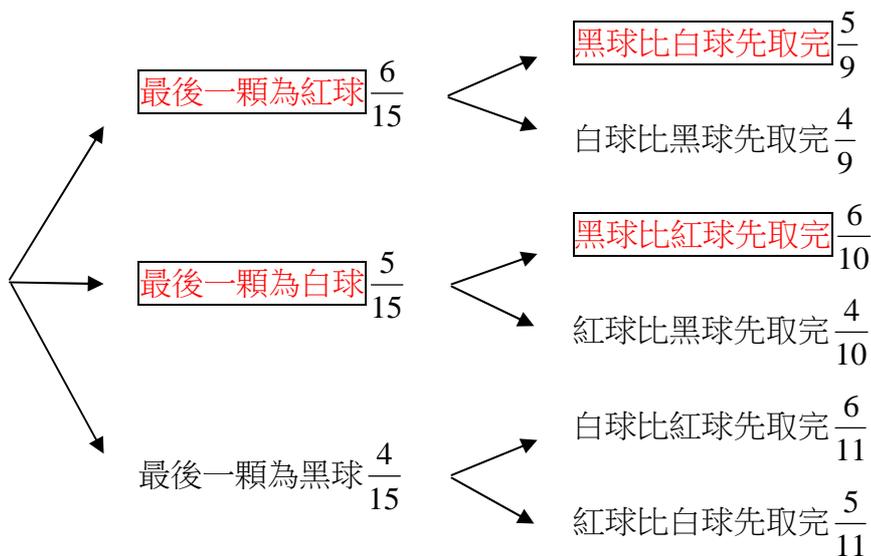
$$\text{故黑球最先取完之機率} = \frac{C_1^5 P_4^{14} C_1^6 \times 9! + C_1^6 P_3^{14} C_1^5 \times 8!}{15!} = \frac{19}{45}。$$

### (方法二) 樹狀圖

解：(1)當紅球為最後一顆球而黑球較白球先取完之機率為  $= \frac{6}{15} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

(2)當白球為最後一顆球而黑球較紅球先取完之機率為  $= \frac{5}{15} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{5}$

$$\text{故所求機率為 } \frac{2}{9} + \frac{1}{5} = \frac{19}{45}$$



### (方法三) 取捨原理(排容原理)

$P(\text{黑球比白球先取完或黑球比紅球先取完}) = P(\text{黑球比白球先取完}) + P(\text{黑球比紅球先取完}) - P(\text{黑球比白球先取完且黑球比紅球先取完})$

則  $P(\text{黑球先取完})$

$= P(\text{黑球比白球先取完}) + P(\text{黑球比紅球先取完}) - P(\text{黑球比白球先取完或黑球比紅球先取完})$

$$= \frac{P_6^{15} C_1^5 8!}{15!} + \frac{P_5^{15} C_1^6 9!}{15!} - \frac{C_1^{11} 14!}{15!} = \frac{5}{9} + \frac{6}{10} - \frac{11}{15} = \frac{50 + 54 - 66}{90} = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$$

<速解>

(方法四)  $P(\text{單純只考慮黑球比白球先取完的機率情形}) = \frac{5}{9}$

$$P(\text{單純只考慮黑球比紅球先取完的機率情形}) = \frac{6}{10}$$

$$P(\text{簡單考慮黑球比白球先取完或黑球比紅球先取完的機率情形}) = \frac{11}{15}。$$

$$\text{黑球最先取完的機率} = \frac{5}{9} + \frac{6}{10} - \frac{11}{15} = \frac{19}{45}。$$

### (方法五) 利用笛摩根定理

$$\begin{aligned} P(\text{黑球先取完}) &= 1 - P(\text{白球比黑球先取完或紅球比黑球先取完}) \\ &= 1 - P(\text{白球比黑球先取完}) - P(\text{紅球比黑球先取完}) + P(\text{白球或紅球比黑球先取完}) \\ &= 1 - \frac{4}{10} - \frac{4}{9} + \frac{4}{15} = 1 - 4 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} \right) = 1 - \frac{16}{45} = \frac{19}{45} \end{aligned}$$

歸納 (2 色球情形 紅球  $m$  個, 黑球  $n$  個)

P(黑球先取完的機率)

歸納想法:

(1) 2 色球情形 : 紅球  $m$  個, 黑球  $n$  個

$$P(\text{黑球先取完的機率}) = \frac{\text{紅球數}}{\text{全部球數}} = \frac{m}{m+n}$$

(2) 3 色球情形 : 紅球  $m$  個, 黑球  $n$  個, 白球  $k$  個

$$\begin{aligned} P(\text{黑球先取完的機率}) &= 1 - P(\text{紅球比黑球先取完或白球比黑球先取完}) \\ &= 1 - (P(\text{紅球比黑球先取完}) + P(\text{白球比黑球先取完}) - P(\text{紅球比黑球先取完且白球比黑球先取完})) \\ &= 1 - \left( \frac{\text{黑球數}}{\text{紅球數} + \text{黑球數}} + \frac{\text{黑球數}}{\text{白球數} + \text{黑球數}} - \frac{\text{黑球數}}{\text{全部球數}} \right) = 1 - \frac{m}{m+n} - \frac{m}{m+k} + \frac{m}{m+n+k}。 \end{aligned}$$

## 六、延伸研究

若一個袋中有 4 種大小相同的色球(顏色編號為 1、2、3、4), 其中第  $i$  種顏色的色球有  $a_i$  個( $i=1,2,3,4$ ), 今從袋中每次取一球不放回, 則第  $k$  種顏色的色球最先取完之機率?

$$(\text{解法}) \text{ 由上述方法五, 求得機率為 } 1 - a_k \left( \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_k + a_i} - \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq k}} \frac{1}{a_k + a_i + a_j} + \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \right)$$

### 參、課程設計以探討取球問題為核心，發展認知、情意、技能的學習

#### 1.在認知方面：

學生能瞭解何謂「機率」、「條件機率」，並能瞭解機率取球問題的各种解題策略。

#### 2.在情意方面：

透過學習共同體的方式進行一題多解討論，討論每種解題模式的優點及限制。甚至票選學生心中最佳的解題策略。由自我和群我辯論引導思考，藉助思辨激盪撞擊學習火花，並在討論過程中練習傾聽與回饋，增進挫折的容忍度。結合多元思考與豐沛學習資源，尋找課堂學習熱情，增進學習能量與效率；再經由發展、詮釋、覺察與後設省思的學習發展學生的心智圖像，以提升對數學的學習興趣與能力。

#### 3. 在技能方面：

學生能透過觀察理解，發展自我解題策略並能加以應用，並進而解決日常生活中的問題。

#### 4. 公開授課時亦可邀請該班導師及任課教師共同觀課，透過課堂觀察了解班級學生在數學課的學習狀況，亦可以提供班級教師教師經驗交流及做為高一輔導班級學生選組(自然組或社會組)與學習與未來生涯發展的參考依據。

### 肆、教學心得：積極投入才能深入、認真付出才能傑出

1. 學習共同體的教學分享~每堂課由複習舊經驗出發、提出新問題之後，教師的首要任務是聆聽學生的想法與學生之間的討論，以及適時提出一些問題以增強討論，透過發展學生的基模歷程、培養學生的數學素養。
2. 「聆聽、串連、返回」鼓勵正向支持與反向挑戰。  
教師要像「架橋者」，建立「思考別人如何思考」的氣氛，再將討論帶往問題的核心，學習課本上的重要知識體系，建立數學與邏輯概念。
3. 透過教室座位安排與麻吉學習夥伴的協助，有效協助學習弱勢生走出學習困境。
4. 點燃學生課堂的求知熱情，展現共同體的學習光芒，相信我們可以做得更好的。

## 伍 附件：學習單

題目 1. 一袋中有 5 個大小相同的球，其中黑球 3 個，白球 2 個，試問

- (1) 從中任取一球，求取到黑球的機率？
- (2) 從中同時取出 2 球，求兩球都是黑球的機率？
- (3) 取一球後不放回，再取一球，求兩球都是黑球的機率？

題目 2: 一袋中有 3 黑球，2 白球，今從袋中每次取一球不放回，求黑球先取完之機率？

數學思考:

設一袋中有  $n$  支籤其中有  $r$  支有獎，每支籤被抽中的機會均等。

如果甲乙丙三人依次抽一支，取後不放回；試證明甲乙丙三人中獎的機率相同

題目 3：一袋中有 6 紅球，5 白球，4 黑球，今從袋中每次取一球不放回，求黑球最先取完之機率？

## 延伸研究

若一個袋中有 4 種大小相同的色球(顏色編號為 1、2、3、4)，其中第  $i$  種顏色的色球有  $a_i$  個( $i=1,2,3,4$ )，今從袋中每次取一球不放回，則第  $k$  種顏色的色球最先取完之機率？