組合計數的實驗與探討

國 立 竹 南 高 級 中 學

李 政 豐

Cheng-Feng Li

E-mail：jengfon.lee@msa.hinet.net

Program of e-Learning,NCTU

１０３·０５·２８ 於國立楊梅高中

Visual Basic 的 實 驗

組合計數的方法與機率實驗

請選擇

竹南高中 李政豐

實驗A 兩種色球

袋中白球，紅球共8個，其中白球w個，紅球r個，每次由袋中取出一球不放回，問紅球先取完的不盡相異物排列有幾種?其機率為何?

實驗B 三種色球

袋中白球，黑球，紅球，共8個，其中白球w個，黑球b個，紅球r個，每次由袋中取出一球不放回，問紅球先取完的不盡相異物排列有幾種?其機率為何?

實驗C 四種色球

袋中白球，黑球，黃球，紅球，共8個，其中白球w個，黑球b個，黃球y個，紅球r個，每次由袋中取出一球不放回，問紅球先取完的不盡相異物排列有幾種?其機率為何?

組合計數的實驗與探討

兩種色球的情形:

白球w 個，紅球r 個，全部放在一個袋子中，每次從中取一球不放回，問紅球先取完的機率是多少？

(最後一個是白球，也就是紅球先取完的事件)

$$p(wW, rR\text{；}R) = \frac{\dfrac{(w-1+r)!}{(w-1)!r!}}{\dfrac{(w+r)!}{w!r!}} = \frac{w}{w+r}$$

組合計數的實驗與探討

三種色球的情形

白球 w 個，黑球 b 個，紅球 r 個，全部放在一個袋，每次從中取一球不放回，問紅球先取完的機率是多少？

A 代表(紅球比白球先取完)，B 代表(紅球比黑球先取完),要計算的是 $n(A\cap B)$

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\text{全部}-n(A'\cap B') = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$(A'\cap B')$ 代表紅球最後取完的事件

狄摩根定理　　　　排容原理

$$1-\frac{r}{w+b+r} = \frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}-p$$

組合計數的實驗與探討

三種色球的情形:

白球w個，黑球b個，紅球r個，全部放在一個袋子中，
每次從中取一球不放回，問紅球先取完的機率是多少？

$$p(wW, bB, rR；R)$$

$$=-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}$$

組合計數的實驗與探討

組合計數的方法與機率實驗

竹南高中　　李政豐

請選擇

實驗A 兩種色球

袋中白球,紅球共8個,其中白球w個,紅球r個,每次由袋中取出一球不放回,問紅球先取完的不盡相異物排列有幾種?其機率為何?

實驗B 三種色球

袋中白球,黑球,紅球,共8個,其中白球w個,黑球b個,紅球r個,每次由袋中取出一球不放回,問紅球先取完的不盡相異物排列有幾種?其機率為何?

實驗C 四種色球

袋中白球,黑球,黃球,紅球,共8個,其中白球w個,黑球b個,黃球y個,紅球r個,每次由袋中取出一球不放回,問紅球先取完的不盡相異物排列有幾種?其機率為何?

組合計數的實驗與探討

四種色球的情形

白球w個，黑球b個，黃球y個，紅球r個，全部放在一個袋子中，每次從中取一球，紅球先取完的機率是多少？

A 代表(紅球比白球先取完的事件), B 代表(紅球比黑球先取完的事件)

C代表(紅球比黃球先取完的事件),要計算的是 $\boxed{n(A\cap B\cap C)}$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+\boxed{n(A\cap B\cap C)}$$

$$\boxed{\text{全部}-n(A'\cap B'\cap C')}=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+\boxed{n(A\cap B\cap C)}$$

$\boxed{(A'\cap B'\cap C')}$ 代表四種球,紅球最後取完的事件

Dynamic teaching environment C.-F.Li 李政豐 竹南高中

組合計數的實驗與探討

四種色球的情形

白球w個，黑球b個，黃球y個，紅球r個，全部放在一個袋子中，每次從中取一球，紅球先取完的機率是多少？

A 代表(紅球比白球先取完的事件), B 代表(紅球比黑球先取完的事件)

C代表(紅球比黃球先取完的事件),要計算的是 $\boxed{n(A\cap B\cap C)}$

$$\boxed{\text{全部}-n(A'\cap B'\cap C')}=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+\boxed{n(A\cap B\cap C)}$$

$$\boxed{1-\mathrm{P}(A'\cap B'\cap C')}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)+\boxed{\mathrm{P}(A\cap B\cap C)}$$

BUT TON
BUT TON

組合計數的實驗與探討

四種色球的情形

白球w個，黑球b個，黃球y個，紅球r個，全部放在一個袋子中，每次從中取一球，紅球先取完的機率是多少？

A 代表(紅球比白球先取完的事件)，B 代表(紅球比黑球先取完的事件)

C代表(紅球比黃球先取完的事件),要計算的是 $P(A\cap B\cap C)$

$$1-P(A'\cap B'\cap C')=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A)=\frac{w}{w+r}$$

$$P(A\cap B)=-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}$$

Dynamic teaching environment C.-F.Li 李政豐 竹南高中

組合計數的實驗與探討

四種色球的情形

白球w個，黑球b個，黃球y個，紅球r個，全部放在一個袋子中，每次從中取一球，紅球先取完的機率是多少？

$$\left(1-\frac{r}{w+b+y+r}\right)=\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}$$
$$-\left(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}\right)$$
$$-\left(-1+\frac{w}{w+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+y+r}\right)$$
$$-\left(-1+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{b+y+r}\right)+P$$

狄摩根定律　　雙重狄摩根與排容原理

組合計數的實驗與探討

四種色球的情形

白球w個，黑球b個，黃球y個，紅球r個，全部放在一個袋子中，每次從中取一球，紅球先取完的機率是多少？

$$\begin{aligned}&\mathrm{p}(wW, bB, yY, rR；R)\\&=-2+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}\\&\quad+\frac{r}{w+b+r}+\frac{r}{w+y+r}+\frac{r}{b+y+r}\\&\quad-\frac{r}{w+b+y+r}\end{aligned}$$

Dynamic teaching environment C.-F.Li 李政豐 竹南高中

組合計數的實驗與探討

兩種色球 $p(wW, rR；R)=\frac{w}{w+r}$

三種色球 $p(wW, bB, rR；R)=-1+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{r}{w+b+r}$

四種色球 $p(wW, bB, yY, rR；R)=-2+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{r}{w+b+r}+\frac{r}{w+y+r}+\frac{r}{b+y+r}-\frac{r}{w+b+y+r}$

組合計數的實驗與探討

五種色球的情形

白球w個，黑球b個，黃球y個，綠球g個，紅球r個,五種色球時,每次從中取一球不放回,紅球先取完的機率是多少?

$$P\,(wW, bB, yY, gG, rR\,;\,R)$$
$$=-3+\frac{w}{w+r}+\frac{b}{b+r}+\frac{y}{y+r}+\frac{g}{g+r}$$
$$+r\left(\frac{1}{w+b+r}+\frac{1}{w+y+r}+\frac{1}{w+g+r}+\frac{1}{b+y+r}+\frac{1}{b+g+r}+\frac{1}{y+g+r}\right)$$
$$-r\left(\frac{1}{w+b+y+r}+\frac{1}{w+b+g+r}+\frac{1}{w+y+g+r}+\frac{1}{b+y+g+r}\right)$$
$$+r\left(\frac{1}{w+b+y+g+r}\right)$$

組合計數的實驗與探討

定理：當有m種色球，顏色是C_1 的色球有n_1 個，顏色是C_2 的色球有n_2 個，…顏色是C_{m-1} 的色球有n_{m-1} 個，顏色是C_m (紅色R)的色球有r個，全部放在一個袋子中，從中每次隨機取出一球不放回，紅球先取完的機率是：

$$p(n_1C_1, n_2C_2, \ldots, n_{m-1}C_{m-1}, rR; R)$$
$$=-(m-2)+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{n_i}{n_i+r} \;+\; r\sum_{i=2}^{m-1}(-1)^i\left(\sum_{A\in\binom{M}{i}}\frac{1}{t(A)+r}\right)$$

其中 $M=\{n_1 ，n_2 ，n_3 ，n_4 ，\ldots\ldots n_{m-1}\}$

若 $A=\{n_1,n_2,n_3\ldots\ldots n_i\}$ 則 $t(A)=n_1+n_2+n_3+\ldots\ldots n_i$

參考資料

1. 李政豐(民國九十三年六月),組合計數的方法兩則,數學傳播,第二十八卷第二期,中央研究院數學研究所發行
2. 新竹女中數學題庫。
3. 九十二年台北市聯合模擬考試數學試題
4. 屠規彰(1981),組合計數的方法及其應用,科學出版社,中國北京。
5. George E. Andrews(1973),Number Theory,Pennsylvania State University。
6. Sheldon Ross(1980),A First Course in Probability,University of California,Berkeley。

當知識與人生都無法預測時,懂得學習、擁抱改變,是唯一的方法。

Thanks For Your Attention !