

取球問題

(甲)：兩種顏色

問題：袋中有 R 色球 r 個、A 色球 a 個，逐一取出不放回，R 色球先取完的機率？

說明：設 R_A 代表 R 色球比 A 色球先取完的事件

$$\text{則 R 色球先取完的機率為 } P(R_A) \Rightarrow P(R_A) = 1 - P(R_{A'}) = \frac{a}{r+a} = 1 - \left(\frac{r}{r+a} \right)$$

註： $R_{A'}$ 代表：R 色球比 A 色球『慢』取完的事件(即 A 色球比 R 色球先取完)

(乙)：三種顏色

問題：袋中有 R 色球 r 個、A 色球 a 個、B 色球 b 個，逐一取出不放回，R 色球最先取完的機率？

說明：設 R_A 代表 R 色球比 A 色球先取完的事件、 R_B 代表 R 色球比 B 色球先取完的事件

則 R 色球最先取完的機率 $P(R_{A \cap B})$ ，根據：取捨原理狄摩根定理

$$\Rightarrow P(R_{A \cap B}) = P(R_A) + P(R_B) - P(R_{A \cup B}) = P(R_A) + P(R_B) - (1 - P(R_{A' \cap B'}))$$

其中 $R_{A' \cap B'}$ 代表：A 色球與 B 色球均比 R 色球先取完

$$\text{即 } R_{A' \cap B'} \text{ 代表：R 色球最後取完，最後位置為 R 色球，所以 } P(R_{A' \cap B'}) = \frac{r}{r+a+b}$$

$$\Rightarrow P(R_{A \cap B}) = P(R_A) + P(R_B) - P(R_{A \cup B}) = P(R_A) + P(R_B) - (1 - P(R_{A' \cap B'}))$$

$$= \left(1 - \frac{r}{r+a} \right) + \left(1 - \frac{r}{r+b} \right) - \left(1 - \frac{r}{r+a+b} \right)$$

$$= 1 - \frac{r}{r+a} - \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+a+b}$$

$$= 1 - \left(\frac{r}{r+a} + \frac{r}{r+b} \right) + \left(\frac{r}{r+a+b} \right)$$

(丙)：四種顏色

問題：袋中有 R 色球 r 個、A 色球 a 個、B 色球 b 個、C 色球 c 個，逐一取出不放回，R 色球最先取完的機率？

說明：設 R_A 代表 R 色球比 A 色球先取完的事件、 R_B 代表 R 色球比 B 色球先取完的事件、 R_C 代表 R 色球比 C 色球先取完的事件

則 R 色球最先取完的機率 $P(R_{A \cap B \cap C})$ ，根據：取捨原理及狄摩根定理

$$\Rightarrow P(R_{A \cap B \cap C}) = -P(R_A) - P(R_B) - P(R_C) + P(R_{A \cap B}) + P(R_{B \cap C}) + P(R_{C \cap A}) + P(R_{A \cup B \cup C})$$

其中 $R_{A' \cap B' \cap C'}$ 代表：A 色球、B 色球、C 色球均比 R 色球先取完

$$\text{即 } R_{A' \cap B' \cap C'} \text{ 代表：R 色球最後取完，最後位置為 R 色球，所以 } P(R_{A' \cap B' \cap C'}) = \frac{r}{r+a+b+c}$$

$$\Rightarrow P(R_{A \cap B \cap C}) = -P(R_A) - P(R_B) - P(R_C) + P(R_{A \cap B}) + P(R_{B \cap C}) + P(R_{C \cap A}) + P(R_{A \cup B \cup C})$$

$$= -P(R_A) - P(R_B) - P(R_C) + P(R_{A \cap B}) + P(R_{B \cap C}) + P(R_{C \cap A}) + (1 - P(R_{A' \cap B' \cap C'}))$$

$$= -\left(1 - \frac{r}{r+a} \right) - \left(1 - \frac{r}{r+b} \right) - \left(1 - \frac{r}{r+c} \right) + \left(1 - \frac{r}{r+a} - \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+a+b} \right)$$

$$+ \left(1 - \frac{r}{r+b} - \frac{r}{r+c} + \frac{r}{r+b+c} \right) + \left(1 - \frac{r}{r+c} - \frac{r}{r+a} + \frac{r}{r+c+a} \right)$$

$$+ \left(1 - \frac{r}{r+a+b+c} \right)$$

$$\Rightarrow P(R_{A \cap B \cap C}) = 1 - \left(\frac{r}{r+a} + \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+c} \right) + \left(\frac{r}{r+a+b} + \frac{r}{r+b+c} + \frac{r}{r+c+a} \right) - \left(\frac{r}{r+a+b+c} \right)$$

(丁)：五種顏色

問題：袋中有 R 色球 r 個、A 色球 a 個、B 色球 b 個、C 色球 c 個、D 色球 d 個，逐一取出不放回，R 色球最先取完的機率？

說明：設 R_A 代表 R 色球比 A 色球先取完的事件、 R_B 代表 R 色球比 B 色球先取完的事件、 R_C 代表 R 色球比 C 色球先取完的事件、 R_D 代表 R 色球比 D 色球先取完的事件

則 R 色球最先取完的機率 $P(R_{A \cap B \cap C \cap D})$ ，根據：取捨原理及狄摩根定理

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(R_{A \cap B \cap C \cap D}) &= P(R_A) + P(R_B) + P(R_C) + P(R_D) \\ &\quad - P(R_{A \cap B}) - P(R_{A \cap C}) - P(R_{A \cap D}) - P(R_{B \cap C}) - P(R_{B \cap D}) - P(R_{C \cap D}) \\ &\quad + P(R_{A \cap B \cap C}) + P(R_{A \cap B \cap D}) + P(R_{A \cap C \cap D}) + P(R_{B \cap C \cap D}) - P(R_{A \cup B \cup C \cup D}) \\ \Rightarrow P(R_{A \cap B \cap C \cap D}) &= P(R_A) + P(R_B) + P(R_C) + P(R_D) \\ &\quad - P(R_{A \cap B}) - P(R_{A \cap C}) - P(R_{A \cap D}) - P(R_{B \cap C}) - P(R_{B \cap D}) - P(R_{C \cap D}) \\ &\quad + P(R_{A \cap B \cap C}) + P(R_{A \cap B \cap D}) + P(R_{A \cap C \cap D}) + P(R_{B \cap C \cap D}) - (1 - P(R_{A' \cap B' \cap C' \cap D'})) \end{aligned}$$

其中 $R_{A' \cap B' \cap C' \cap D'}$ 代表：A 色球、B 色球、C 色球、D 色球均比 R 色球先取完

即 $R_{A' \cap B' \cap C' \cap D'}$ 代表：R 色球最後取完，最後位置為 R 色球，所以 $P(R_{A' \cap B' \cap C' \cap D'}) = \frac{r}{r+a+b+c+d}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(R_{A \cap B \cap C \cap D}) &= P(R_A) + P(R_B) + P(R_C) + P(R_D) \\ &\quad - P(R_{A \cap B}) - P(R_{A \cap C}) - P(R_{A \cap D}) - P(R_{B \cap C}) - P(R_{B \cap D}) - P(R_{C \cap D}) \\ &\quad + P(R_{A \cap B \cap C}) + P(R_{A \cap B \cap D}) + P(R_{A \cap C \cap D}) + P(R_{B \cap C \cap D}) - (1 - P(R_{A' \cap B' \cap C' \cap D'})) \\ &= \left(1 - \frac{r}{r+a}\right) + \left(1 - \frac{r}{r+b}\right) + \left(1 - \frac{r}{r+c}\right) + \left(1 - \frac{r}{r+d}\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{r}{r+a} - \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+a+b}\right) - \left(1 - \frac{r}{r+a} - \frac{r}{r+c} + \frac{r}{r+a+c}\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{r}{r+a} - \frac{r}{r+d} + \frac{r}{r+a+d}\right) - \left(1 - \frac{r}{r+b} - \frac{r}{r+c} + \frac{r}{r+b+c}\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{r}{r+b} - \frac{r}{r+d} + \frac{r}{r+b+d}\right) - \left(1 - \frac{r}{r+c} - \frac{r}{r+d} + \frac{r}{r+c+d}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{r}{r+a} - \frac{r}{r+b} - \frac{r}{r+c} + \frac{r}{r+a+b} + \frac{r}{r+b+c} + \frac{r}{r+c+a} - \frac{r}{r+a+b+c}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{r}{r+a} - \frac{r}{r+b} - \frac{r}{r+d} + \frac{r}{r+a+b} + \frac{r}{r+b+d} + \frac{r}{r+d+a} - \frac{r}{r+a+b+d}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{r}{r+a} - \frac{r}{r+c} - \frac{r}{r+d} + \frac{r}{r+a+c} + \frac{r}{r+c+d} + \frac{r}{r+d+a} - \frac{r}{r+a+c+d}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{r}{r+b} - \frac{r}{r+c} - \frac{r}{r+d} + \frac{r}{r+b+c} + \frac{r}{r+c+d} + \frac{r}{r+d+b} - \frac{r}{r+b+c+d}\right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{r}{r+a+b+c+d}\right) \\ \Rightarrow P(R_{A \cap B \cap C \cap D}) &= 1 - \left(\frac{r}{r+a} + \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+c} + \frac{r}{r+d}\right) + \left(\frac{r}{r+a+b} + \frac{r}{r+a+c} + \frac{r}{r+a+d}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{r}{r+b+c} + \frac{r}{r+b+d} + \frac{r}{r+c+d}\right) - \left(\frac{r}{r+a+b+c} + \frac{r}{r+a+b+d}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{r}{r+a+c+d} + \frac{r}{r+b+c+d}\right) + \left(\frac{r}{r+a+b+c+d}\right) \end{aligned}$$

推論：

問題：袋中有 R 色球 r 個及

A 色球 a 個、B 色球 b 個、C 色球 c 個、D 色球 d 個，……(R 色球外還有 n 種色球)

逐一取出不放回，R 色球最先取完的機率？

說明：設 R 代表 R 色球最先取完的事件

且 R 色球外的 n 種色球的元素個數的集合為 $\Omega = \{a, b, c, d, \dots\}$

Sum(T)代表：子集合 T 內元素的總和

$$\Rightarrow P(R) = 1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\sum_{\substack{S \subseteq N \\ n(S)=i}} \frac{r}{r + \text{Sum}(S)} \right) = 1 + r \cdot \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\sum_{\substack{S \subseteq N \\ n(S)=i}} \frac{1}{r + \text{Sum}(S)} \right)$$