

1. 一個不透明的袋中有大小材質相同的 5 個球，其中紅球 3 個、綠球 2 個，試問：

(1) 從袋中任取一球，求取到紅球的機率？

(2) 從袋中同時取出 2 球，求兩球都是紅球的機率？

(3) 從袋中每次取一球，取後不放回，連取兩球，求兩球都是紅球的機率？

解：

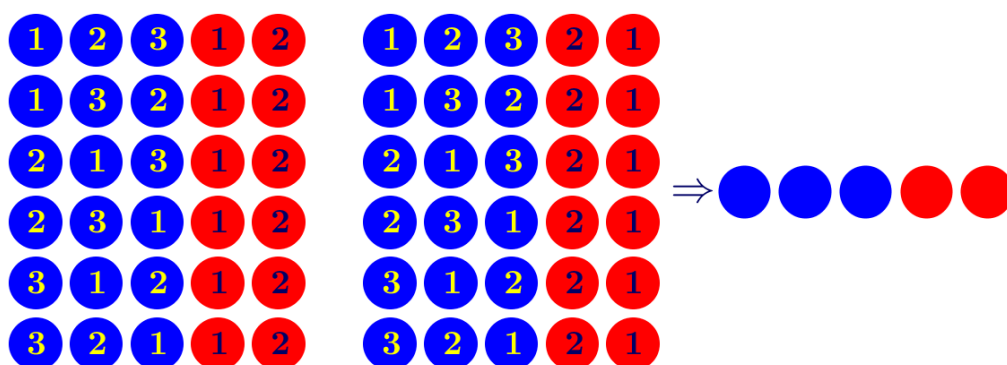
$$(1) \text{ 從中任取一球，求取到紅球的機率} = \frac{3}{5}$$

$$(2) \text{ 從中同時取出 2 球，求兩球都是紅球的機率} = \frac{C_2^3}{C_2^5} = \frac{3}{10}$$

$$(3) \text{ 取一球後不放回，再取一球，求兩球都是紅球的機率} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

2. 將相同的藍球 3 個，相同的紅球 2 個排成一行，有幾種方法？

為了區分，我們將藍、紅球分別編號，這樣就有①②③三個藍球及①②兩個紅球，將這些編有號碼的 5 個球作直線排列，會有 5! 種排法。但是，其中究竟有幾種直線排列在抹去球上編號後，會和●●●●●的排列相同呢？經過一一列舉，下圖中的 12 種直線排列，在抹去球上編號後，會形成圖右「藍藍藍紅紅」的排列。而排列數 12 是由 3! 與 2! 乘積而得的，即分別將 1、2、3 寫在藍球上，1、2 寫在紅球上的方法數：



也就是說對每一種排法而言，若將三個藍色球與兩個紅色球皆看成不同，則有 $3! \cdot 2! = 12$ 種排法。事實上，這 12 種排法在抹去球上編號後都會對應到同一種排法。因此，相同的藍球三個與相同的紅球兩個排成一行，共有

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{120}{12} = 10 \text{ 種排法。}$$

而另外一種考慮方法是

3. 一個不透明的袋中有大小材質相同的紅色球 3 個、綠色球 5 個，每次取出一球，取後不放回，試求紅色球先取完的機率？

說明：設 R_G 代表紅色球比綠色球先取完的事件

因為紅色球先取完，代表最後位置一定是綠色球

處理步驟：

(1) 選一個綠色球放入最後一個位置

(2) 再將剩下的紅色球 3 個、綠色球 4 個，排入剩下的 7 個位置

解：

【法一】球相異(有編號)時： $\underbrace{R_1, R_2, R_3}_{3\text{個有編號的紅色球}}, \underbrace{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5}_{5\text{個有編號的綠色球}}$



$$\Rightarrow P(R_G) = \frac{C_1^5 (3+5-1)!}{(3+5)!} = \frac{5}{3+5} = \frac{5}{8}$$

【法二】.球相同(無編號)時： $\underbrace{R, R, R}_{3\text{個無編號的紅色球}}, \underbrace{G, G, G, G, G}_{5\text{個無編號的綠色球}}$



$$\Rightarrow P(R_G) = \frac{1 \cdot \frac{(3+5-1)!}{3! \cdot (5-1)!}}{(3+5)!} = \frac{5}{3+5} = \frac{5}{8}$$

結論：袋中有紅色球 r 個、綠色球 g 個，逐一取出不放回，紅色球最先取完的機率為 $P(R_G)$

$$\Rightarrow P(R_G) = \frac{g}{r+g} = 1 - \left(\frac{r}{r+g} \right)$$

4. 一個不透明的袋中，有大小材質相同的紅色球 7 個(沒中獎)、綠色球 3 個(中獎)，今甲乙丙三人從袋中依序每人取出一球，取後不放回，試求三人取到綠色球(中獎)的機率？

此問題就是『袋中有中獎籤 3 隻、沒中獎籤 7 隻，今甲乙丙三人從袋中依序抽一隻籤，抽出後不放回。試求三人抽中有獎籤的機率？』

說明：設 G_n 代表：第 n 個位置是綠色球(中獎)的事件

處理步驟：

(1).選一個綠色球放入第 n 個位置($1 \leq n \leq 3$)

(2).再將剩下的紅色球 7 個、綠色球 2 個，排入剩下的 9 個位置

解：

【法一、球相異(有編號)】 $\underbrace{R_1, R_2, R_3, \dots, R_6, R_7}_{7 \text{ 個有編號的紅色球}}, \underbrace{G_1, G_2, G_3}_{3 \text{ 個有編號的綠色球}}$

		G_i							
--	--	-------	--	--	--	--	--	--	--

$$\Rightarrow P(G_n) = \frac{C_1^3 \cdot (3+7-1)!}{(7+3)!} = \frac{3}{10}$$

【法二、球相同(無編號)】 $\underbrace{R, R, R, \dots, R, R}_{7 \text{ 個無編號的紅色球}}, \underbrace{G, G, G}_{3 \text{ 個無編號的綠色球}}$

	G								
--	-----	--	--	--	--	--	--	--	--

$$\Rightarrow P(G_n) = \frac{1 \cdot \frac{(7+3-1)!}{7! \times (3-1)!}}{\frac{(7+3)!}{7! \times 3!}} = \frac{\frac{9!}{7! \times 2!}}{\frac{10!}{7! \times 3!}} = \frac{3}{10}$$

故第 n 個位置是綠色球(或稱第 n 個抽獎的人抽中獎)的機率： $P(G_n) = \frac{g}{r+g}$

結論：無論 n 多少(其中 $1 \leq n \leq r+g$)， $P(G_n) = \frac{g}{r+g}$ 與 n 無關。

結論：袋中有紅色球 r 個(代表：沒中獎)、綠色球 g 個(代表：中獎)，取出不放回，則無論抽獎順序的先後，抽中綠色球(代表：中獎)的機率均為 $\frac{g}{r+g}$

【法三】樹狀圖分析

處理步驟：

甲是第一個抽籤者，所以我們不用考慮

乙第二個抽籤者，所以要考慮甲中乙也中、跟甲不中乙中

丙是第三個抽籤者，所以要考慮甲中乙中丙也中、甲不中乙中丙中、甲中乙不中丙中，跟甲不中乙不中丙中

$$P(\text{甲}) = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{乙}) = P(\text{甲} \cap \text{乙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{丙}) = P(\text{甲} \cap \text{乙} \cap \text{丙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙} \cap \text{丙}) + P(\text{甲} \cap \text{乙}' \cap \text{丙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙}' \cap \text{丙})$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{10}$$

$$\text{故知 } P(\text{甲}) = P(\text{乙}) = P(\text{丙}) = \frac{3}{10}$$

5. 一個不透明的袋中有大小材質相同的紅色球 5 個、綠色球 4 個、藍色球 3 個，每次取出一球，取後不放回，試求紅色球先取完的機率？

【法一、取捨原理與狄摩根定理】

說明：

處理步驟：

設 R_G 代表紅色球比綠色球先取完的事件

R_B 代表紅色球比藍色球先取完的事件

則紅色球最先取完的機率 $P(R_{G \cap B})$

因為：

$$P(R_{G \cap B}) = P(R_G) + P(R_B) - P(R_{G \cup B}) = P(R_G) + P(R_B) - (1 - P(R_{G' \cap B'}))$$

其中 $R_{G' \cap B'}$ 代表：綠色球與藍色球均比紅色球先取完

即 $R_{G' \cap B'}$ 代表：紅色球最後取完，最後位置為紅色球。

$$\text{所以 } P(R_{G' \cap B'}) = \frac{5}{5+4+3} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow P(R_{G \cap B}) = P(R_G) + P(R_B) - P(R_{G \cup B}) = P(R_G) + P(R_B) - (1 - P(R_{G' \cap B'}))$$

$$= \left(1 - \frac{5}{5+4}\right) + \left(1 - \frac{5}{5+3}\right) - \left(1 - \frac{5}{5+4+3}\right)$$

$$= 1 - \frac{5}{5+4} - \frac{5}{5+3} + \frac{5}{5+4+3}$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{5+4} + \frac{5}{5+3}\right) + \left(\frac{5}{5+4+3}\right)$$

$$= 1 - \frac{40+45-30}{72}$$

$$= \frac{17}{72}$$

結論：袋中有紅色球 r 個、綠色球 g 個、藍色球 b 個，逐一取出不放回，紅色球最先取完的機率為 $P(R_{G \cap B})$

$$\Rightarrow P(R_{G \cap B}) = 1 - \left(\frac{r}{r+g} + \frac{r}{r+b}\right) + \left(\frac{r}{r+g+b}\right)$$

【法二、排列組合】

討論：

最後一個是綠球且紅球先取完；最後一個是藍球且紅球先取完的情形：

處理步驟：

(1) 最後一個是綠球且紅球先取完：

先任取一個綠球放在最後，接著將剩下綠球任排，再來任取一個藍球放在最後面綠球的前面(即：藍綠、藍綠綠、藍綠綠綠)，最後將剩下 9 個任意排列

方法數： $C_1^4 P_3^{11} C_1^3 \times 7!$

(2) 最後一個是藍球且紅球先取完的情形：

先取一個紅球放最後，接著將剩下紅球任排，再來任取一個綠球放在後面紅球的前面(ex：綠紅、綠紅紅、綠紅紅紅)，最後將剩下 8 個任意排列方法

數： $C_1^6 P_5^{14} C_1^5 \times 8!$

故黑球最先取完之機率 = $\frac{C_1^4 P_3^{11} C_1^3 \times 7! + C_1^6 P_5^{14} C_1^5 \times 8!}{12!} = \frac{19}{45}$ 。

【法三、樹狀圖】

處理步驟：

(1) 當紅球為最後一顆球而黑球較白球先取完之機率為 $= \frac{6}{15} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

(2) 當白球為最後一顆球而黑球較紅球先取完之機率為 $= \frac{5}{15} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{5}$

故所求機率為 $\frac{2}{9} + \frac{1}{5} = \frac{19}{45}$

【法四、取捨原理，即排容原理】

$P(\text{黑球比白球先取完或黑球比紅球先取完}) = P(\text{黑球比白球先取完}) + P(\text{黑球比紅球先取完}) - P(\text{黑球比白球先取完且黑球比紅球先取完})$

則 $P(\text{黑球先取完})$

$= P(\text{黑球比白球先取完}) + P(\text{黑球比紅球先取完}) - P(\text{黑球比白球先取完或黑球比})$

紅球先取完)

$$= \frac{P_6^{15} C_1^5 8!}{15!} + \frac{P_5^{15} C_1^6 9!}{15!} - \frac{C_1^{11} 14!}{15!} = \frac{5}{9} + \frac{6}{10} - \frac{11}{15} = \frac{50 + 54 - 66}{90} = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$$