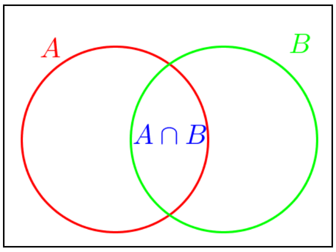
引理：

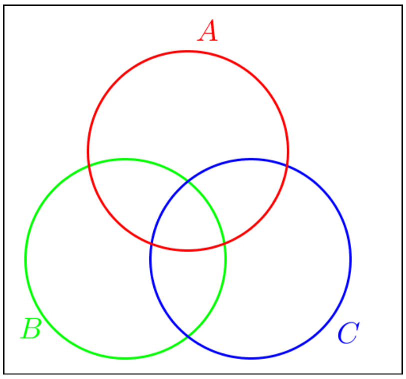
1. 取捨原理(排容原理) 30”

① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$；



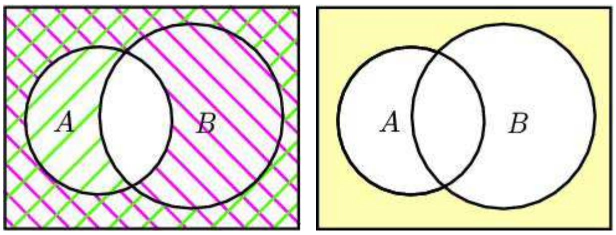
② $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)$

$-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$；

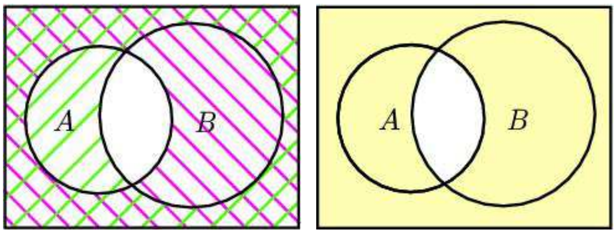


2. 笛摩根定理 30”

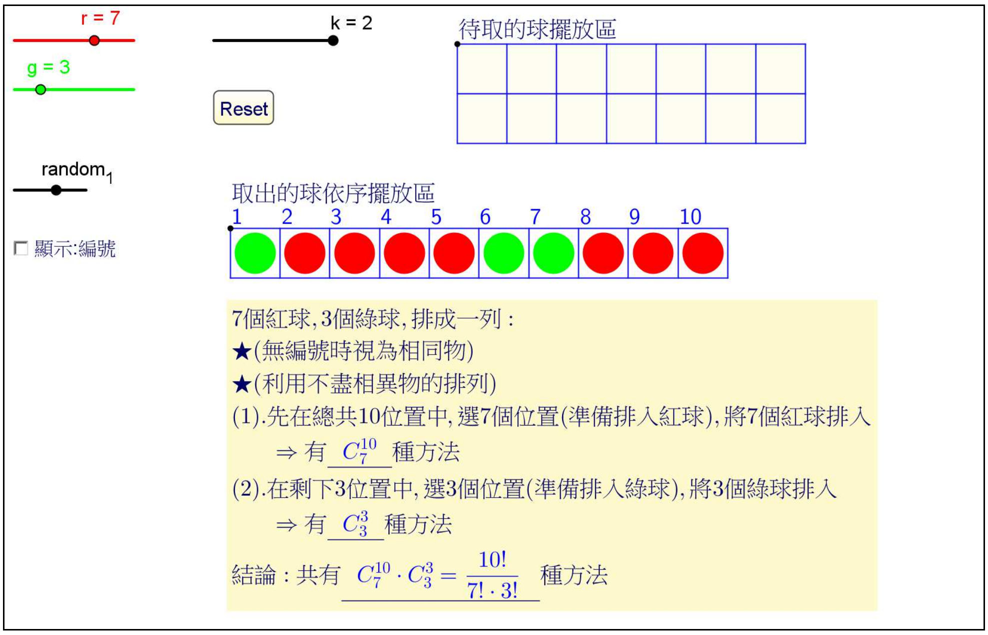
① $P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)$；

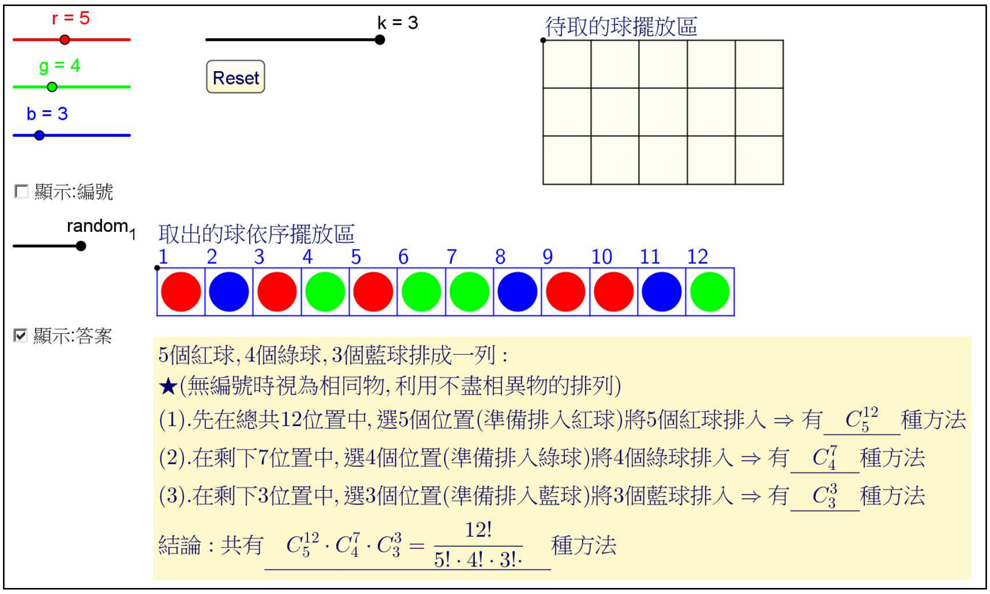


② $P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)$。

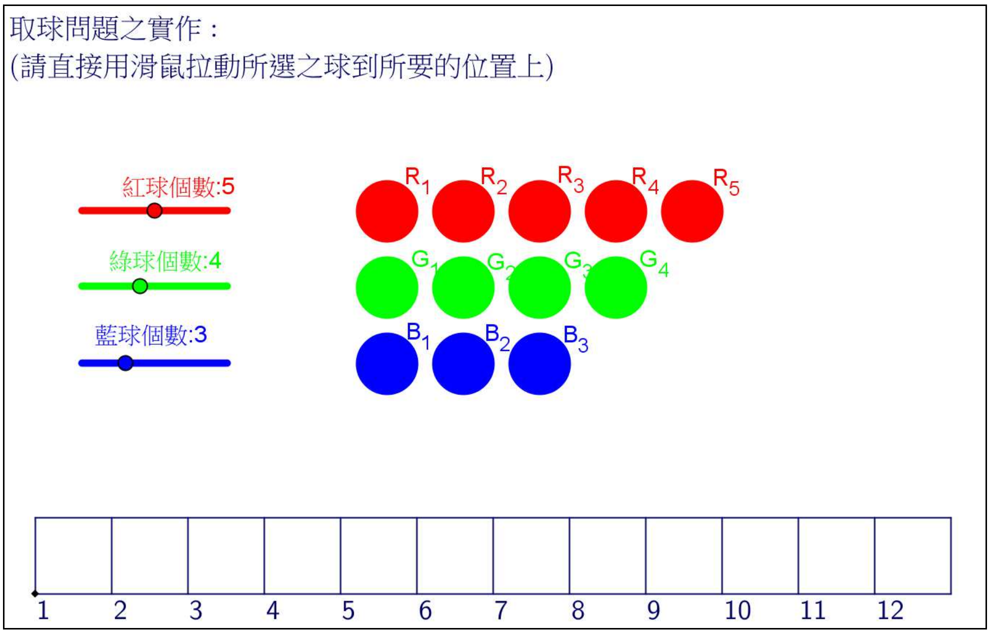


3. 不盡相異物的排列 1'＋1'30"





4. 取球問題 30”



取球問題之實作：
(請直接用滑鼠拉動所選之球到所要的位置上)
紅球個數:5
綠球個數:4
藍球個數:3
R1 R2 R3 R4 R5
G1 G2 G3 G4
B1 B2 B3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

範例：

1. 一個不透明的袋中有大小材質相同的 5 個球，其中紅球 3 個、綠球 2 個，試問：

(1) 從袋中任取一球，求取到紅球的機率？

(2) 從袋中同時取出 2 球，求兩球都是紅球的機率？

(3) 從袋中每次取一球，取後不放回， 連取兩球，求兩球都是紅球的機率？

解：

(1) 從中任取一球，取到紅球的機率為 $P=\dfrac{C_1^3}{C_1^5}=\dfrac{3}{5}$

(2) 從中同時取出 2 球，兩球都是紅球的機率為 $P=\dfrac{C_2^3}{C_2^5}=\dfrac{3}{10}$

(3) 取一球後不放回，再取一球，兩球都是紅球的機率為 $P=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{10}$

2. 一個不透明的袋中有大小材質相同的 3 個紅球、5 個綠球，每次取出一球，取後不放回，試求紅球先取完的機率？ 10’

說明：設 R_G 代表紅球比綠球先取完的事件

因為紅球先取完，代表最後位置一定是綠球

處理步驟：

(1) 選一個綠球放入最後一個位置

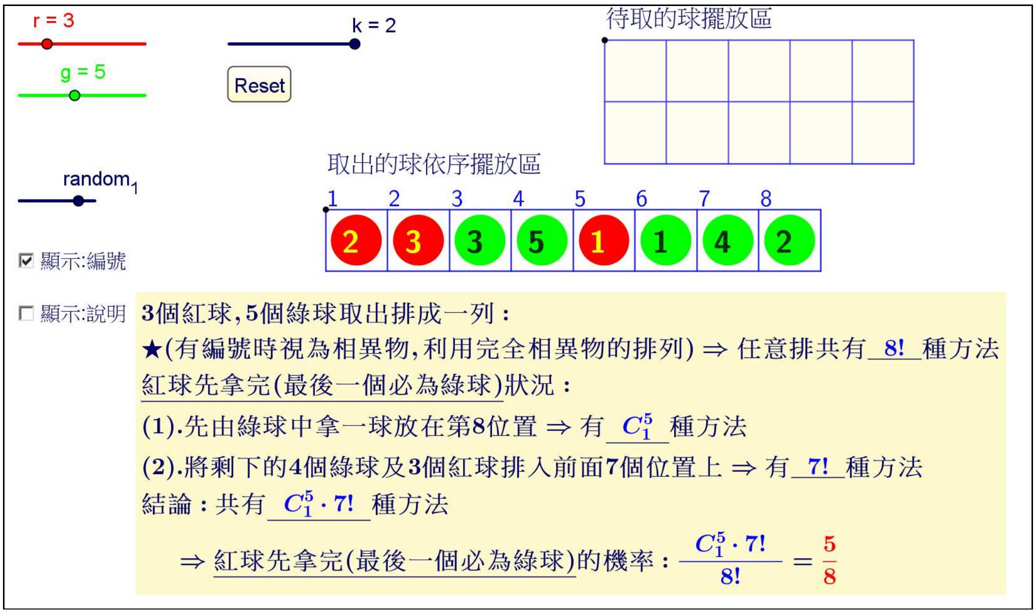
(2) 再將剩下的 3 個紅球、4 個綠球，排入前面的 7 個位置 30”

解：

【法一】球相異(有編號)時：$\underbrace{R_1,R_2,R_3}_{3個有編號的紅球}$，$\underbrace{G_1,G_2,G_3,G_4,G_5}_{5個有編號的綠球}$ 40”

						G_i

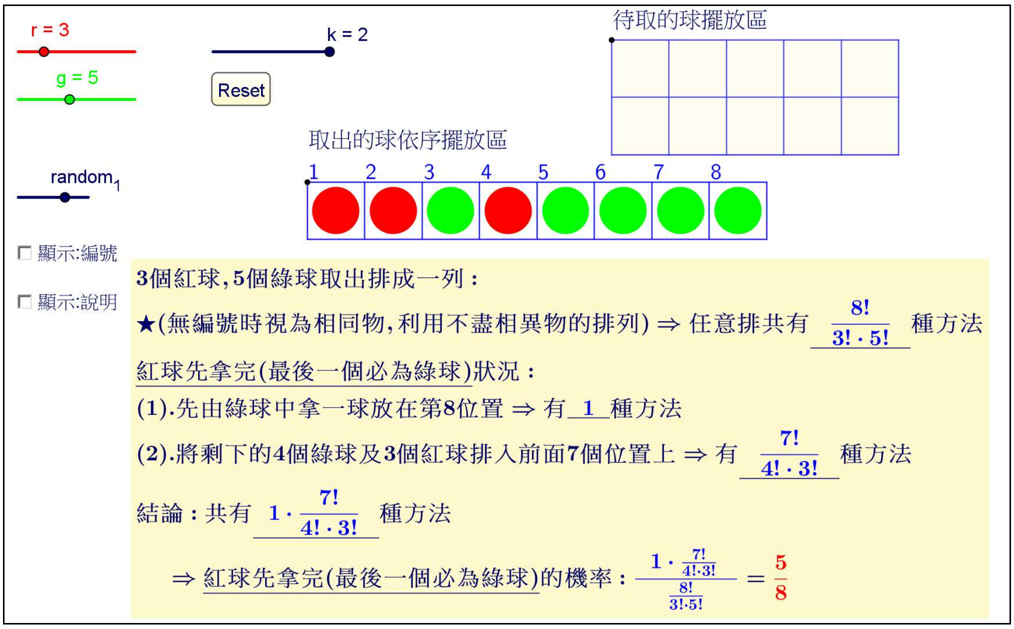
$$\Rightarrow P(R_G)=\frac{C_1^5(3+5-1)!}{(3+5)!}=\frac{5\times 7!}{8!}=\frac{5}{8}$$



【法二】球相同(無編號)時： $\underbrace{R,R,R}_{3個無編號的紅球}$ ， $\underbrace{G,G,G,G,G}_{5個無編號的綠球}$ 40”

						G

$$\Rightarrow P(R_G)=\frac{1\times\frac{7!}{3!\times4!}}{\frac{8!}{3!\times5!}}=\frac{\frac{7!}{4!}}{\frac{8!}{5!}}=\frac{5}{8}$$



結論： 1’

袋中有 r 個紅球、g 個綠球，逐一取出不放回，紅球最先取完的機率為 $P(R_G)$：

$$\Rightarrow \boxed{P(R_G)=\frac{g}{r+g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(R_G)=1-\left(\frac{r}{r+g}\right)}$$

3. 在一個不透明的袋中，有大小材質相同的 7 個紅球 (沒中獎)、3 個綠球 (中獎)，今甲、乙、丙三人從袋中依序每人取出一球，取後不放回，試求三人取到綠球(中獎)的機率？

此問題就是『袋中有中獎籤 3 隻，沒中獎籤 7 隻，今甲、乙、丙三人從袋中依序抽一隻籤，抽出後不放回。試求三人抽中有獎籤的機率？』 25”

說明：

設 G_n 代表：第 n 個位置是綠色球(中獎)的事件

處理步驟：

(1).選一個綠球放入第 n 個位置($1 \le n \le 3$)

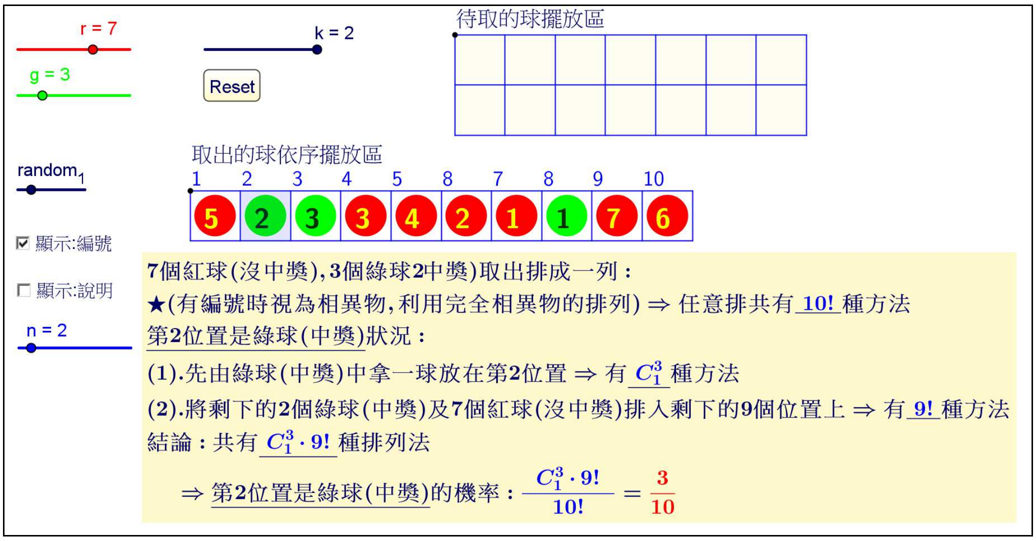
(2).再將剩下的 7 個紅球、2 個綠球，排入剩下的 9 個位置 25”

解：

【法一、球相異(有編號)】 $\underbrace{R_1, R_2, R_3, \ldots, R_6, R_7}_{\text{7個有編號的紅球}}$ ， $\underbrace{G_1, G_2, G_3}_{\text{3個有編號的綠球}}$ 45”

		G_i							

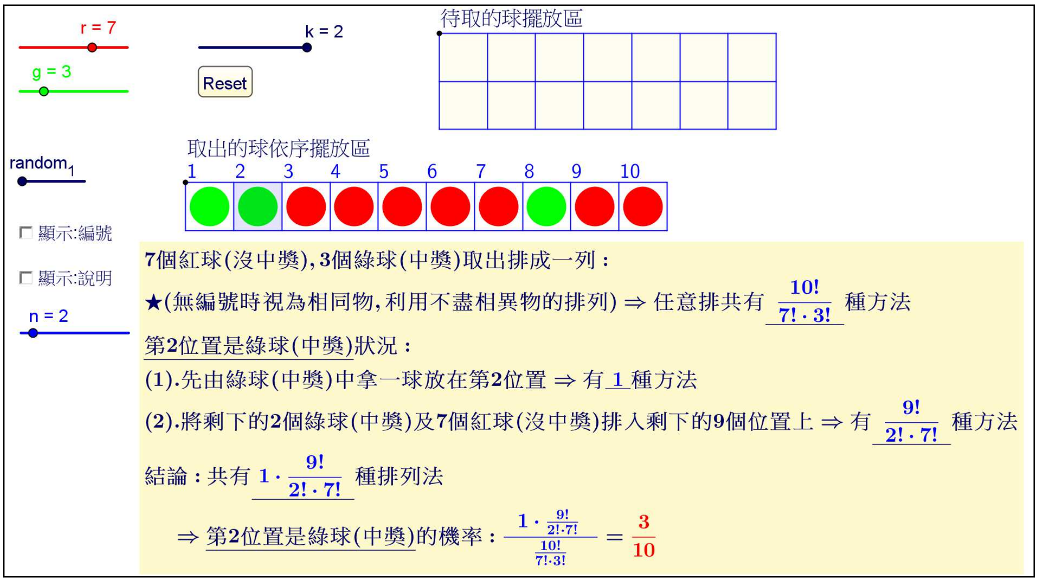
$$\Rightarrow P(G_n) = \frac{C_1^3 \times 9!}{10!} = \frac{3}{10}$$



【法二、球相同(無編號)】$\underbrace{R,R,R,...,R,R}_{7個無編號的紅球}$， $\underbrace{G,G,G}_{3個無編號的綠球}$ 45”

	G								

$$\Rightarrow P(G_n)=\frac{1\times\dfrac{9!}{7!\times 2!}}{\dfrac{10!}{7!\times 3!}}=\frac{\dfrac{9!}{2!}}{\dfrac{10!}{3!}}=\frac{3}{10}$$



故第 n 個位置是綠球(或稱第 n 個抽獎的人抽中獎)的機率： $P(G_n)=\dfrac{g}{r+g}$

無論 n 多少(其中 $1\le n\le r+g$)， $P(G_n)=\dfrac{g}{r+g}$ 與 n 無關。

結論： 45”

袋中有紅色球 r 個(代表：沒中獎)、綠色球 g 個(代表：中獎)，取出不放回，

則無論抽獎順序的先後，抽中綠色球(代表：中獎)的機率均為 $\boxed{\dfrac{g}{r+g}}$

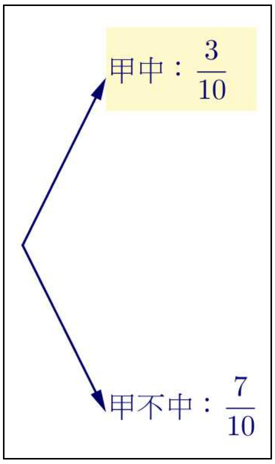
【法三】樹狀圖分析 2”30”

處理步驟：

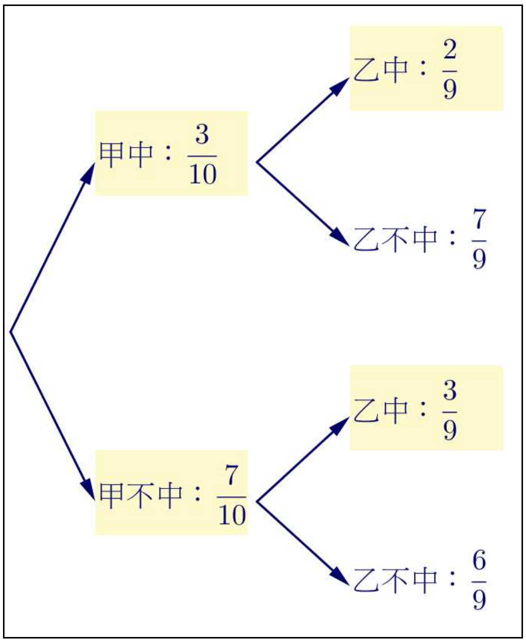
甲是第一個抽籤者，所以我們不用考慮

乙第二個抽籤者，所以要考慮甲中乙也中、跟甲不中乙中

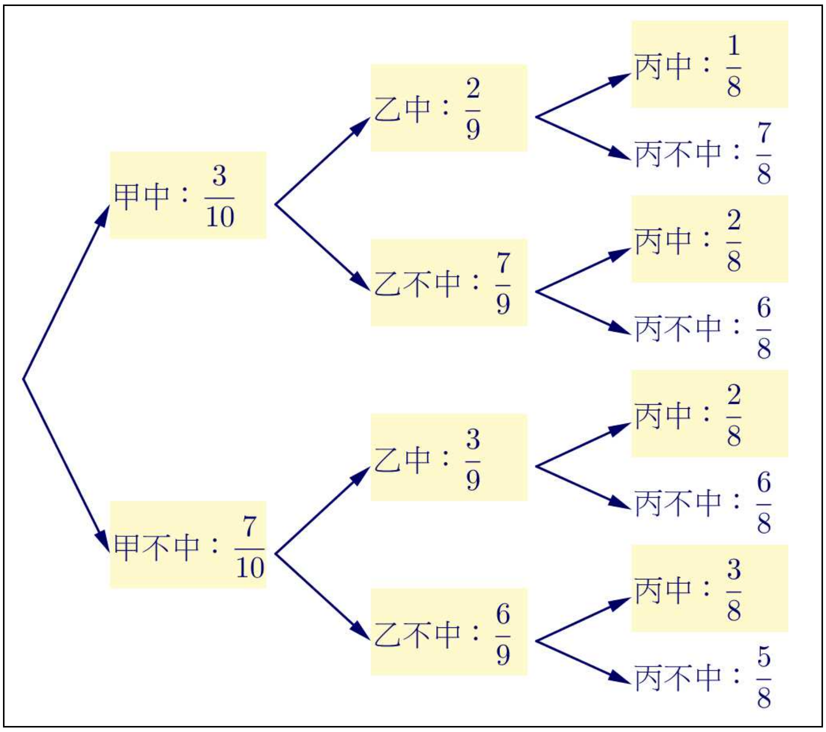
丙是第三個抽籤者，所以要考慮甲中乙中丙也中、甲不中乙中丙中、甲中乙不中丙中，跟甲不中乙不中丙中



$P(甲)=\frac{3}{10}$



$$P(乙)=P(甲\cap乙)+P(甲'\cap乙)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$$



$$P(丙)=P(甲\cap乙\cap丙)+P(甲'\cap乙\cap丙)+P(甲\cap乙'\cap丙)+P(甲'\cap乙'\cap丙)$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{10}$$

故知 $P(甲)=P(乙)=P(丙)=\frac{3}{10}$

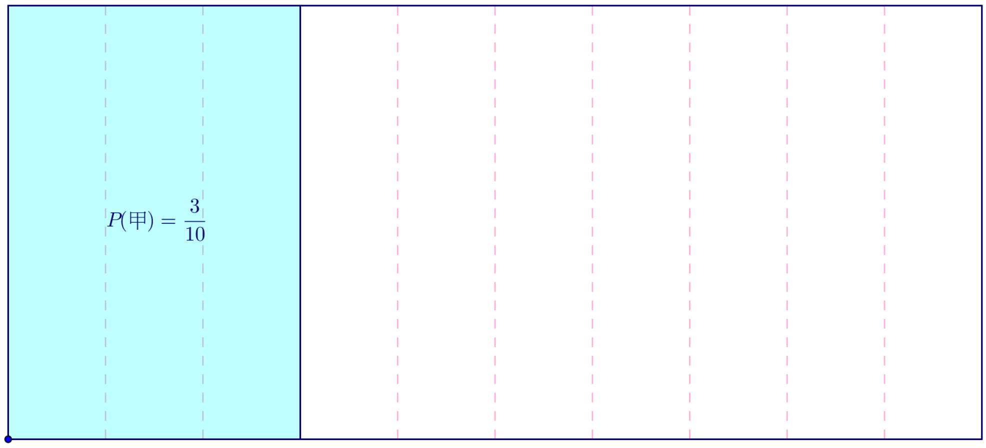
【法四、條件機率】 2’

我們以分割的概念來處理：

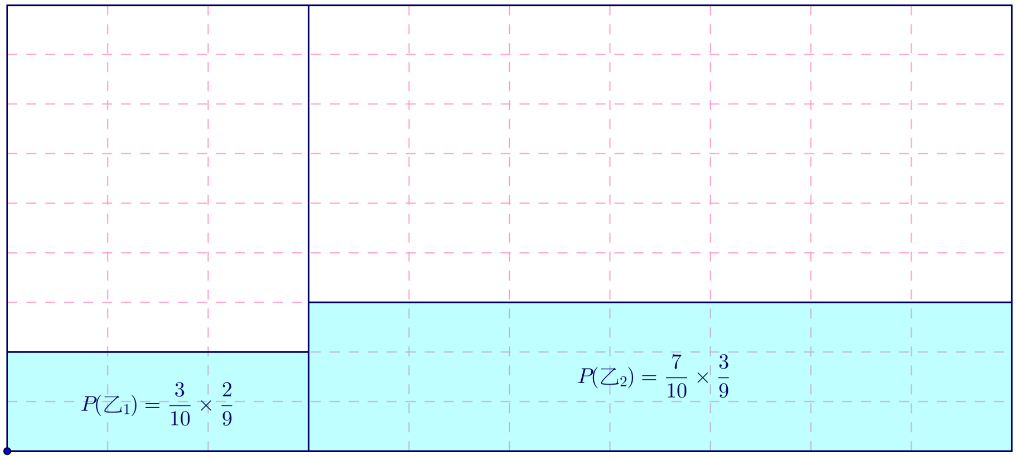
甲是第一個抽籤者，所以我們不用考慮

乙第二個抽籤者，所以要考慮甲中乙也中、跟甲不中乙中

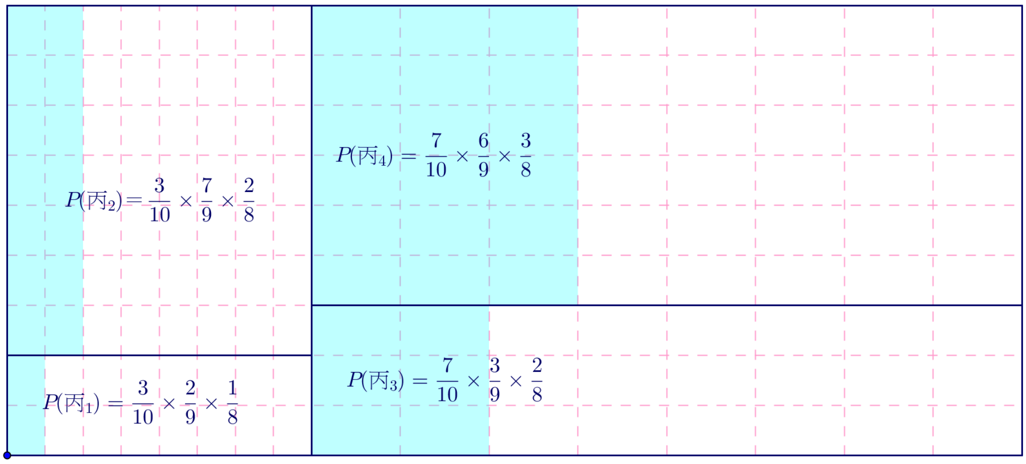
丙是第三個抽籤者，所以要考慮甲中乙中丙也中、甲不中乙中丙中、甲中乙不中丙中，跟甲不中乙不中丙中



$$P(甲)=\frac{3}{10}$$



$$P(乙)=P(甲\cap乙)+P(甲'\cap乙)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$$



$$P(丙)=P(甲\cap乙\cap丙)+P(甲'\cap乙\cap丙)+P(甲\cap乙'\cap丙)+P(甲'\cap乙'\cap丙)$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{10}$$

故知 $P(甲)=P(乙)=P(丙)=\frac{3}{10}$

4. 一個不透明的袋中有大小材質相同的 5 個紅球、4 個綠球、3 個藍球，每次取出一球，取後不放回，試求紅球先取完的機率？

【法一、取捨原理與笛摩根定理】

處理步驟：

設 R_G 代表紅球比綠球先取完的事件

R_B 代表紅球比藍球先取完的事件

則紅球最先取完的機率 $P(R_{G\cap B})$

因為：

$$\boxed{P(R_{G\cap B})=P(R_G)+P(R_B)-P(R_{G\cup B})=P(R_G)+P(R_B)-\left(1-P(R_{G'\cap B'})\right)}$$

其中 $R_{G'\cap B'}$ 代表：綠球與藍球均比紅球先取完

即 $R_{G'\cap B'}$ 代表：紅球最後取完，最後位置為紅球。

所以 $P(R_{G'\cap B'})=\dfrac{5}{5+4+3}=\dfrac{5}{12}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(R_{G\cap B})&=P(R_G)+P(R_B)-P(R_{G\cup B})=P(R_G)+P(R_B)-\left(1-P(R_{G'\cap B'})\right)\\&=\left(1-\frac{5}{5+4}\right)+\left(1-\frac{5}{5+3}\right)-\left(1-\frac{5}{5+4+3}\right)\\&=1-\left(\frac{5}{5+4}+\frac{5}{5+3}-\frac{5}{5+4+3}\right)\\&=1-\left(\frac{5}{5+4}+\frac{5}{5+3}\right)+\left(\frac{5}{5+4+3}\right)\\&=1-\frac{40+45-30}{72}=\frac{17}{72}\end{aligned}$$

結論：

袋中有 r 個紅球、g 個綠球、b 個藍球，逐一取出不放回，紅球最先取完的機率為 $P(R_{G\cap B})$

$$\Rightarrow \boxed{P(R_{G\cap B})=1-\left(\frac{r}{r+g}+\frac{r}{r+b}\right)+\left(\frac{r}{r+g+b}\right)}$$

一個不透明的袋中有大小材質相同的5個紅球, 4個綠球, 3個藍球，每次取出一球，取後不放回，試求紅球先取完的機率.

依據取捨原理(排容原理)與笛摩根定理

$$
\begin{aligned}
&P(\text{紅球比綠球先取完且紅球比藍球先取完}) \\
&= P(\text{紅球比綠球先取完}) + P(\text{紅球比藍球先取完}) - P(\text{紅球比綠球先取完或紅球比藍球先取完}) \\
&= P(\text{紅球比綠球先取完}) + P(\text{紅球比藍球先取完}) - [1 - P(\text{綠球比紅球先取完且藍球比紅球先取完})] \\
&= \left(1-\frac{r}{r+g}\right)+\left(1-\frac{r}{r+b}\right)-\left(1-\frac{r}{r+g+b}\right) \\
&= \left(1-\frac{5}{5+4}\right)+\left(1-\frac{5}{5+3}\right)-\left(1-\frac{5}{5+4+3}\right) \\
&= \frac{4}{9}+\frac{3}{8}-\frac{7}{12} \\
&= \frac{17}{72}
\end{aligned}
$$

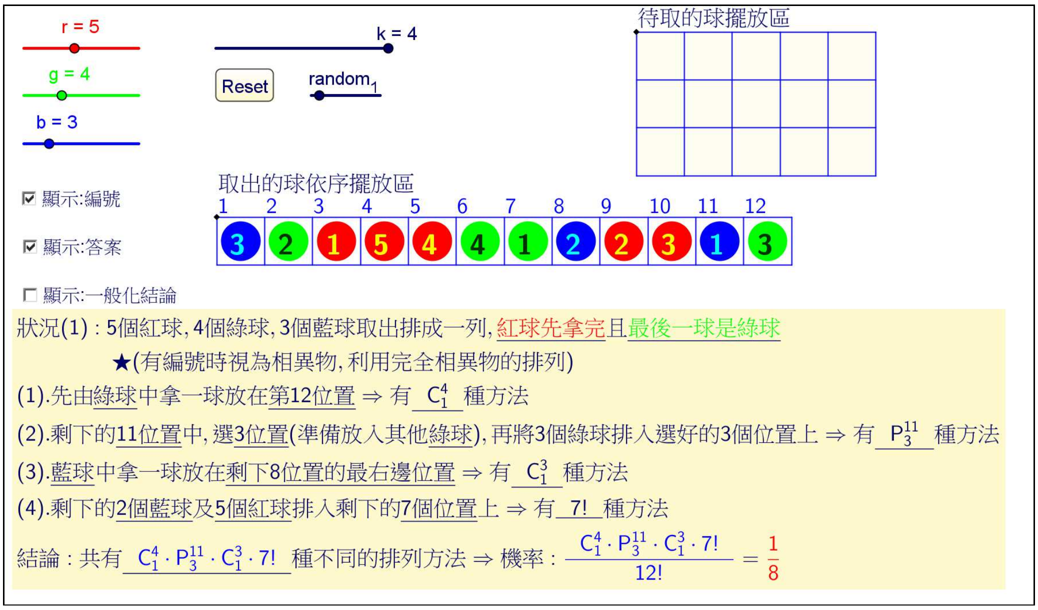
【法二、球相異(有編號)時】

最後一球是綠球且紅球先取完或最後一球是藍球且紅球先取完的情形：

處理步驟：

(1) 最後一球是綠球且紅球先取完：

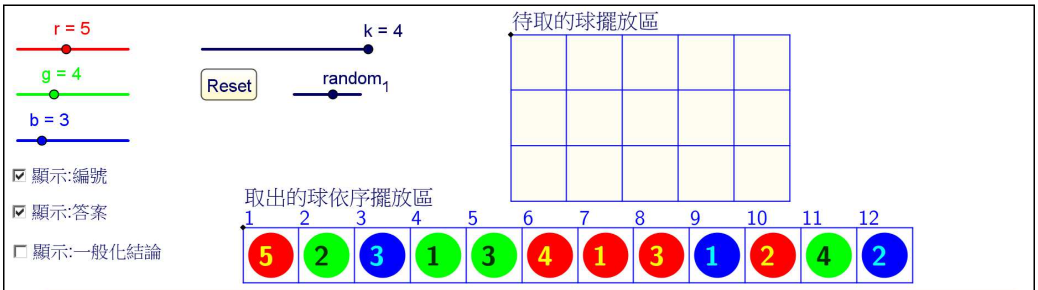
先任取一個綠球放在最後，接著將剩下綠球任意排，再來任取一個藍球放在最後面綠球的前面(即：藍綠、藍綠綠、藍綠綠綠、...)，最後將剩下 7 個任意排列方法數：$C_1^4 P_3^{11} C_1^3 \times 7!$



(2) 最後一球是藍球且紅球先取完的情形：

先取一個藍球放最後，接著將剩下藍球任意排，再來任取一個綠球放在最後面藍球的前面(即：綠藍、綠藍藍、綠藍藍藍、...)，最後將剩下 8 個任意排列方法數：$C_1^3 P_2^{11} C_1^4 \times 8!$

故紅球最先取完之機率為：$\dfrac{C_1^4 P_3^{11} C_1^3 \times 7! + C_1^3 P_2^{11} C_1^4 \times 8!}{12!} = \dfrac{17}{72}$ 。



狀況(2)：5個紅球, 4個綠球, 3個藍球取出排成一列, 紅球先拿完且最後一個是藍球

★(有編號時視為相異物, 利用完全相異物的排列)

(1).先由藍球中拿一球放在第12位置 $\Rightarrow$ 有 C_1^3 種方法

(2).在剩下的11位置中, 任選2位置(準備放入其他藍球)將2個藍球排入選好的2個位置上 $\Rightarrow$ 有 P_2^{11} 種方法

(3).由綠球中拿一球放在剩下9位置的最右邊位置 $\Rightarrow$ 有 C_1^4 種方法

(4).將剩下的3個綠球及5個紅球排入剩下的8個位置上 $\Rightarrow$ 有 $8!$ 種方法

結論：共有 $C_1^3\cdot P_2^{11}\cdot C_1^4\cdot 8!$ 種不同的排列方法 $\Rightarrow$ 機率：$\dfrac{C_1^3\cdot P_2^{11}\cdot C_1^4\cdot 8!}{12!}=\dfrac{1}{9}$

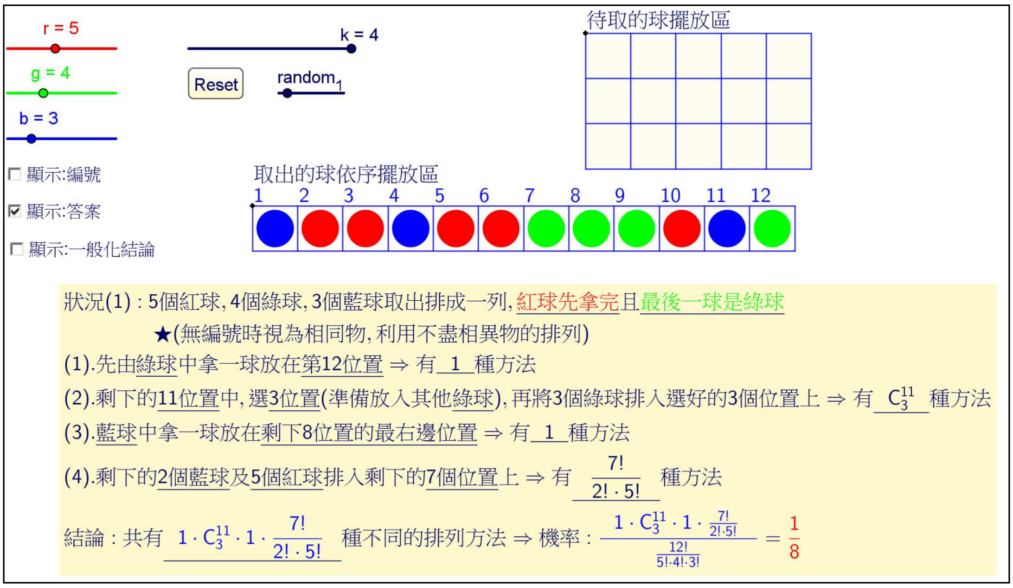
【法三、球相同(無編號)】

最後一球是綠球且紅球先取完或最後一球是藍球且紅球先取完的情形：

處理步驟：

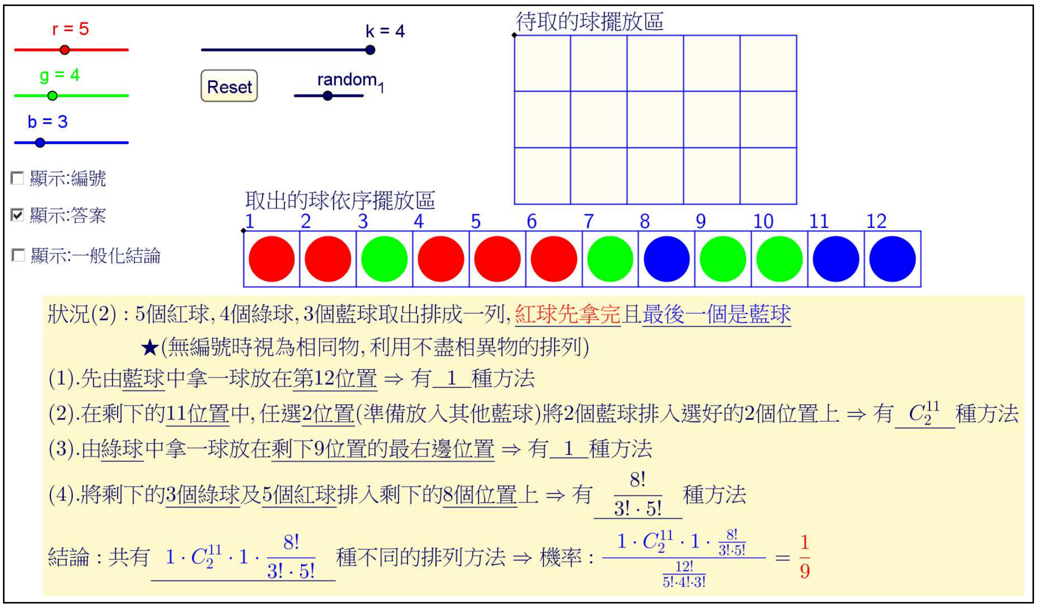
(1) 最後一球是綠球且紅球先取完：

先任取一個綠球放在最後，接著將剩下綠球任意排，再來任取一個藍球放在最後面綠球的前面(即：藍綠、藍綠綠、藍綠綠綠、…)，最後將剩下 7 個任意排列方法數：$1\times C_3^{11}\times 1\times\dfrac{7!}{2!\times 5!}$



(2) 最後一球是藍球且紅球先取完的情形：

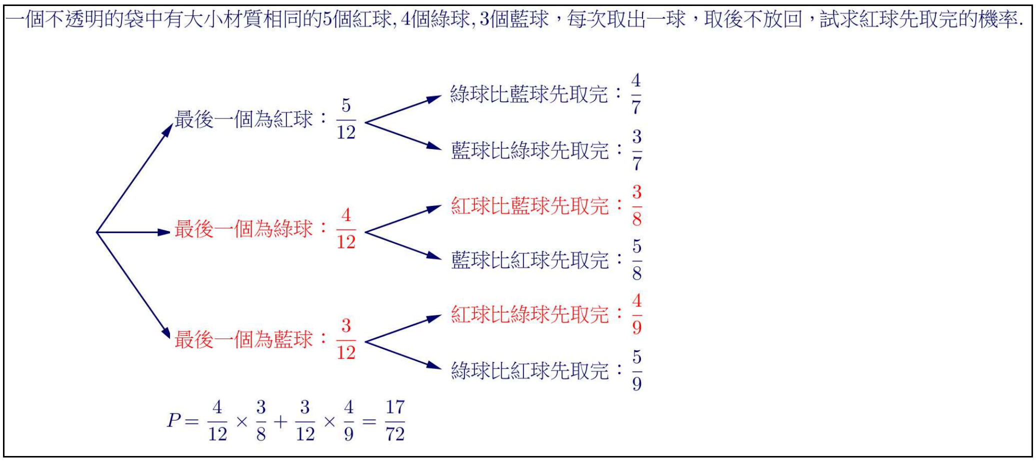
先取一個藍球放最後，接著將剩下藍球任意排，再來任取一個綠球放在最後面藍球的前面(即：綠藍、綠藍藍、綠藍藍藍、…)，最後將剩下 8 個任意排列方法數：$1\times C_2^{11}\times 1\times\dfrac{8!}{3!\times 5!}$



故紅球最先取完之機率為：$\dfrac{1\times C_3^{11}\times 1\times\dfrac{7!}{2!\times 5!}+1\times C_2^{11}\times 1\times\dfrac{8!}{3!\times 5!}}{\dfrac{12!}{5!\times 4!\times 3!}}=\dfrac{17}{72}$ 。

【法四、樹狀圖】

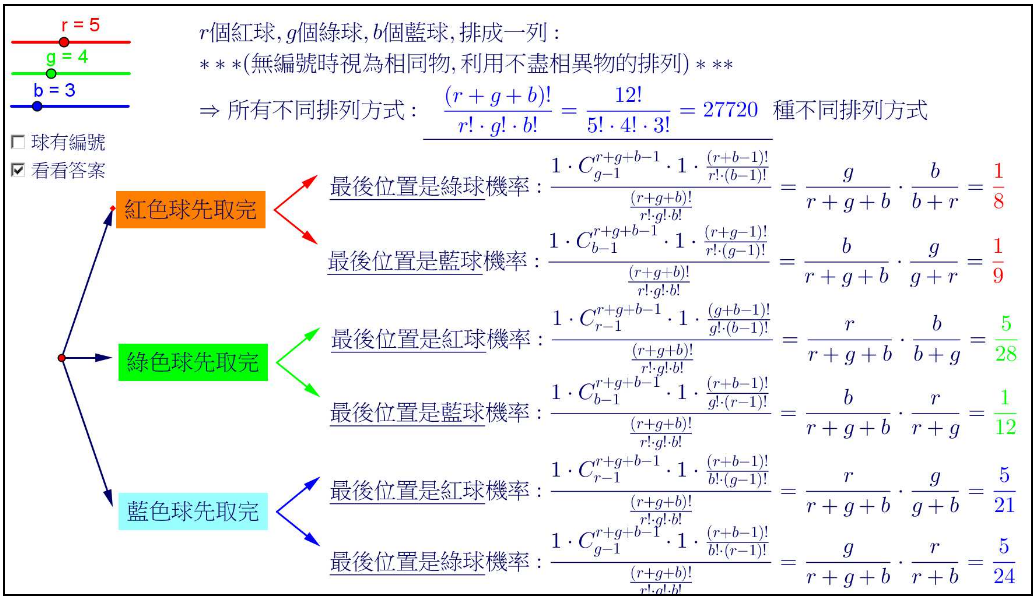
處理步驟：



(1)當綠球為最後一顆球而紅球較藍球先取完之機率為$\frac{4}{12}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$

(2)當藍球為最後一顆球而紅球較綠球先取完之機率為$\frac{3}{12}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$

故所求機率為$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{17}{72}$



【法五、笛摩根定理】

設 G_R 代表綠球比紅球先取完的事件

B_R 代表藍球比紅球先取完的事件

$R_{G\cap B}$ 代表紅球比綠球先取完且紅球比藍球先取完的事件

$R_{G'\cup B'}$ 代表綠球比紅球先取完或藍球比紅球先取完的事件

根據笛摩根定理：

$$P(R_{G\cap B})=1-P(R_{G'\cup B'})$$

$$=1-\left(P(G_R)+P(B_R)-P(G_R\cap B_R)\right)$$

$$=1-\left(\frac{5}{9}+\frac{5}{8}-\frac{5}{12}\right)$$

$$=\frac{72-40-45+30}{72}=\frac{17}{72}$$

一個不透明的袋中有大小材質相同的5個紅球, 4個綠球, 3個藍球，每次取出一球，取後不放回，試求紅球先取完的機率.

依據笛摩根定理

$$P(\text{紅球比綠球先取完且紅球比藍球先取完})$$
$$=1-P(\text{綠球比紅球先取完或藍球比紅球先取完})$$
$$=1-[P(\text{綠球比紅球先取完的事件})+P(\text{藍球比紅球先取完})-P(\text{綠球比紅球先取完且藍球比紅球先取完})]$$
$$=1-\left(\frac{r}{r+g}+\frac{r}{r+b}-\frac{r}{r+g+b}\right)$$
$$=1-\left(\frac{5}{9}+\frac{5}{8}-\frac{5}{12}\right)$$
$$=\frac{17}{72}$$

【法六、取捨原理(排容原理)】

設 R_G 代表紅球比綠球先取完的事件

R_B 代表紅球比藍球先取完的事件

$R_{G\cup B}$ 代表紅球比綠球先取完或紅球比藍球先取完的事件

$R_{G\cap B}$ 代表紅球比綠球先取完且紅球比藍球先取完的事件

根據取捨原理(排容原理)：

$$P(R_{G\cup B})=P(R_G)+P(R_B)-P(R_{G\cap B})$$

$$P(R_{G\cap B})=P(R_G)+P(R_B)-P(R_{G\cup B})=\frac{4}{9}+\frac{3}{8}-\frac{7}{12}=\frac{17}{72}$$

一個不透明的袋中有大小材質相同的5個紅球, 4個綠球, 3個藍球，每次取出一球，取後不放回，試求紅球先取完的機率.

依據取捨原理(排容原理)

P(紅球比綠球先取完或紅球比藍球先取完)

$= P$(紅球比綠球先取完) $+ P$(紅球比藍球先取完) $- P$(紅球比綠球先取完且紅球比藍球先取完)

P(紅球比綠球先取完且紅球比藍球先取完)

$= P$(紅球比綠球先取完) $+ P$(紅球比藍球先取完) $- P$(紅球比綠球先取完或紅球比藍球先取完)

$$=\frac{g}{r+g}+\frac{b}{r+b}-\frac{g+b}{r+g+b}$$

$$=\frac{4}{9}+\frac{3}{8}-\frac{7}{12}$$

$$=\frac{17}{72}$$