

102年度台南市夥伴學習群 數學科差異化教學與 動態幾何教學*Geogebra*研習

藍邦偉老師

2013.05.22

台南市國立新豐高中

差異化教學

- 差異化教學是一種針對同一班級之不同程度、學習需求、學習方式及學習興趣之學生提供多元學習輔導方案的教學模式。
- 教師可由課程內容、實施過程、實施成果三項要素考慮如何差異化教學。

（本實施計畫，甄曉蘭主持，2012）

差異化教學：從不同教育領域分析

- 考量學生的不同狀態，以多元方式促成學生成功學習。
- 因應學生個別差異的調整向度大致相同：內容、歷程、成果。
- 班級經營會影響差異化教學的可行性與成效。

差異化教學

教材

刪減、添加、重組

教法

教學法、作業設計

評量

蒐集資料（成就、動機、情緒）、
檢驗向度（平均、變異、個案）

資源與
支援

行政、團隊、家長社區、資訊科技

分組

課前、課中

時間

日常上課、第八節、假日

差異化教學的實施

- 差異化教學是針對同一班級不同學習需求、學習方式、學習興趣及學習程度的學生，教師在課堂上視情況提供多元性學習輔導方案的教學模式。
- 差異化教學模式可能採取多樣的教學策略、彈性的分組教學、多層次的教材，以及持續性的、多元化的評量以激發學生的參與及不同的潛能。

差異化教學的理論背景

- 差異化教學的基本理論是根基於維果斯基氏的社會互動鷹架理論，視學習為合作互動的社會活動過程，強調教學計畫需考量學生的準備度、興趣與學習形態。教師可就課程內容、實施過程和教學結果三要素考量適切的差異化教學的方式。

數學科差異化教學教材設計原則與策略

1. 分析重要觀點
2. 持續性的評量與教學進度調整
3. 彈性的分組方式
4. 適切的學習任務
5. 開放問題
6. 分層探索
7. 多元表徵
8. 平行作業

Geogebra

- *Geometry + Algebra*
- 奧地利的年輕數學教授 *Markus Hohenwarter*，於 2001 年在 University of Salzburg 開始發展此軟體，後來陸續在美國 Florida Atlantic University，2006–2008 與 Florida State University，2008–2009 持續研發此案，目前馬可仕與此專案已移回奧地利的 University of Linz，並擁有一個人數眾多的跨國開發團隊，與無數協助翻譯成各國語言的翻譯志工。

輕鬆上手*GeoGebra*

1. Java環境

2. 到*GeoGebra*官網

<http://www.geogebra.org/cms/>下載，建議下載可攜版或選擇Webstart

3.*GeoGebra*版本：4.2版，5.0 Beta

<http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp>

4. 舊版*GeoGebra*可至下列連結下載

<http://code.google.com/p/geogebra/downloads/list?num=100&start=600>

用*GeoGebra*做教學單元設計

1. 設計理念
 - (1) 教師課間使用：
單元課件素材
 - (2) 學生使用：
讓學生回家上網使用，反覆學習 學生使用：
 - (3) 解題使用：
講解不易在黑板畫出相關圖形的題目
2. 製作方法
3. 實例分享

*GeoGebra*的快捷列

alt-= -> not equals	alt-b -> beta
alt+-> plus or minus	alt-d -> delta
alt-- -> superscript minus	alt-e -> Euler e
alt-< -> less than or equal	alt-f -> phi
alt-> -> greater than or equal	alt-g -> gamma
alt-, -> less than or equal	alt-u -> infinity
alt-. -> greater than or equal	alt-i -> constant representing sqrt(-1)
alt-a -> alpha	alt-l -> lambda

*GeoGebra*的快捷列

alt-m -> mu	alt-2 -> to the power of 2
alt-o -> degree sign	alt-3 -> to the power of 3
alt-p -> pi	alt-4 -> to the power of 4
alt-s -> sigma	alt-5 -> to the power of 5
alt-t -> theta	alt-6 -> to the power of 6
alt-w -> omega	alt-7 -> to the power of 7
alt-0 -> to the power of 0	alt-8 -> to the power of 8
alt-1 -> to the power of 1	alt-9 -> to the power of 9

Geogebra的代數輸入

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
點坐標	$A(1,2)$	A=(1,2) 點坐標必須是 <u>大寫</u> 字母開頭
極坐標	$P[2,30^\circ]$	P=(2;30°) 點坐標必須是 <u>大寫</u> 字母開頭
複數坐標	$B(2+3i)$	B=2+3i 點坐標必須是 <u>大寫</u> 字母開頭
向量(點坐標表示)	$v = (1,3)$	v=(1,3) 向量必須是 <u>小寫</u> 字母開頭
向量(極坐標表示)	$p[1, \frac{\pi}{3}]$	p=(1;alt-p/3) 向量必須是 <u>小寫</u> 字母開頭
向量(複數坐標表示)	$q = -1 + 2i$	q=-1+2i 向量必須是 <u>小寫</u> 字母開頭

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
f 上一點 P		P=Point[f]
$\overline{AB}$ 線段		Segment[A,B]
$\overrightarrow{AB}$ 射線		Ray[A,B]
$\overleftrightarrow{AB}$ 直線		Line[A,B]
$\overrightarrow{AB}$ 向量		Vector[A,B]
$\angle ABC$		Angle[A,B,C]
多邊形		Polygon[A,B,C]
折線		Polyline[A,B,C,A]
平移		Translate[物件,向量]
旋轉		Rotate[物件,角度,旋轉中心]
伸縮		Dilate[物件,縮放倍數,縮放中心]

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
對稱		Reflect [物件,點]、 Reflect [物件,直線]、 Reflect [物件,線段]、 Reflect [物件,射線]
乘法	數字(式子)乘法 $\times$ 、向量內積 $\cdot$	* 或 空白鍵
乘法(數字)	$a = 5 \times 3 + 2012$	$a = 5*3+2012$
乘法(內積)	$(2,3) \cdot (-3,2)$	$(2,3)*(-3,2)$
次方	2^3	2^3
二階行列式	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$	$(2,3) \otimes (-3,2)$
乘法(複數)	$(2+3i) \times (3-2i)$	$(2+3i)*(3-2i)$
階乘	$5!$	$5!$
取出點的 x 坐標	取出點 P 的 x 坐標	$x(P)$
取出點的 y 坐標	取出點 P 的 y 坐標	$y(P)$
商數	整數 a 除以整數 b 的商數	Div [a,b]
餘數(模數)	整數 a 除以整數 b 的餘數	Mod [a,b]

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
最大公因數	整數 a 與整數 b 的最大公因數	GCD[a,b]
最小公倍數	整數 a 與整數 b 的最小公倍數	LCM[a,b]
四捨五入	取最接近 a 的整數	Round(a)
絕對值	$ -23 $	abs(-23)
組合數	C_2^5	BinomialCoefficient[5,2]
正負號(性質符號)		sgn()
根號		sqrt()
立方根		cbrt()
0 到 1 的隨機數		random()
a 到 b 的隨機數	整數 a 與整數 b 之間的隨機數	Randombetween(a,b)
集合中隨機排序		Shuffle[<List>]
函數 f 的定義域為 [a,b]	$f(x) = x^2, -2 \leq x \leq 1$	Function[x^2,-2,1]

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
如果	If[條件,a]: 若條件為真時可得 a, 為假時則未定義	If[condition,a]
如果	If[條件,a,b]: 若條件為真時可得 a, 為假時可得 b	if[condition,a,b]
曲線	$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t < 2\pi$	Curve[x(2cos(t)),y(sin(t)),t,0,2 pi]
指數函數	2^x	2^x
指數函數	e^x	exp(x)
對數(以 e 為底)		ln()
對數(以 2 為底)		ld()
對數(以 10 為底)		lg()
對數(以 a 為底)	$\log_a x$	Log(a,x)

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
正弦函數		<code>sin()</code>
餘弦函數		<code>cos()</code>
正切函數		<code>tan()</code>
餘切函數		<code>cot()</code>
正割函數		<code>sec()</code>
餘割函數		<code>csc()</code>
反正弦函數		<code>asin()</code> 或 <code>arcsin()</code>
反餘弦函數		<code>acos()</code> 或 <code>arccos()</code>
反正切函數		<code>atan()</code> 或 <code>arctan()</code>
上高斯函數	$[x]$	<code>ceil()</code>
下高斯函數	$[x]$	<code>floor(x)</code>
多項式	$y = 2x^2 - 4x + 3$	<code>y=2x^2-4x+3</code>
一次函數	$f(x) = 3x - 2$	<code>f(x)=3x-2</code>

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
二次函數	$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$	<code>f(x)=2 x^2+3 x+1</code>
三次函數	$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 3$	<code>f(x)=-2x^3+4x^2-3</code>
最高公因式	求兩多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式	<code>HCF[f(x),g(x)]</code>
最低公倍式	求兩多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最低公倍式	<code>LCM[f(x),g(x)]</code>
$f(x)$ 的一階導函數	$f'(x)$	<code>Derivative[f]</code>
	$f'(x)$	<code>Derivative[f(x)]</code>
	$f'(x)$	<code>f'(x)</code>
$f(x)$ 的二階導函數	$f''(x)$	<code>Derivative[f(x),2]</code>
	$f''(x)$	<code>f''(x)</code>

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
f(x) 的三階導函數	$f'''(x)$	Derivative[f(x),3]
	$f'''(x)$	f'''(x)
最小值	取 a,b 中較小者	Min[a,b]
最大值	取 a,b 中較大者	Max[a,b]
最小值	取集合 list 中最小者	Min[list]
最大值	取集合 list 中最大者	Max[list]
分點比	$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	Affineratio[A,B,C]
f(x) 的 n 階導函數	$f^{(n)}(x)$	Derivative[f,n]
將 f(x) 展開	將 f(x) 的括號乘開	Expand[f(x)]
	展開 $(x+1)(x+2)(x+3)$	Expand[(x+1)(x+2)(x+3)]
	將多項式 f(x) 展開	Polynomial[f(x)]

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
將 $f(x)$ 因式分解	將多項式 $f(x)$ 因式分解	<code>Factor[f(x)]</code>
	因式分解 $x^2 - 4x + 3$	<code>Factor[x^2-4x+3]</code>
插值多項式	過(1,2),(3,4)(4,-1)三點的二次多項式	<code>Polynomial[(1,2),(3,4)(4,-1)]</code>
化簡 $f(x)$	將 $f(x)$ 化簡	<code>Simplify[f(x)]</code>
	化簡 $x + 2x + 3x$	<code>Simplify[x+2x+3x]</code>
	化簡 $\frac{\sin x}{\cos x}$	<code>Simplify[sin(x) / cos(x)]</code>
	化簡 $-2 \sin x \cos x$	<code>Simplify[-2 sin(x) cos(x)]</code>
泰勒展開式	$f(x)$ 對 $x = a$ 的 n 次泰勒展開式	<code>TaylorPolynomial[f(x), a, n]</code>
分段函數	$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 3 \\ x^2 & x \geq 3 \end{cases}$	<code>f(x) = If[x < 3, sin(x), x^2]</code>
限制函數的定義域	$f(x) = x^2 + x + 1, -2 \leq x \leq 3$	<code>f(x) = Function[x^2+x+1,-2,3]</code>

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
梯形和	$f(x)$ 在 $[-2,3]$ 分割成 10 等份的梯形和	TrapezoidalSum[f,-2,3,10]
$f(x)$ 的反導函數 常數為 0	$\int f(x)dx$	Integral[f(x)]
$f(x)$ 的定積分	$\int_{-2}^3 f(x)dx$	Integral[f(x),-2,3]
	$\int_{-2}^3 x^3 dx$	Integral[x^3,-2,3]
	$f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 的面積	Integral[f(x),g(x), a,b]
多項式 $f(x)$ 的反曲點	找出 $f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ 的反曲點	InflectionPoint[f]
多項式 $f(x)$ 的所有根	找出 $f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ 的所有根	Root[f]
牛頓法找函數 $f(x) = 0$ 的一根	以牛頓法找出函數 $f(x)$ 以 $x = a$ 為起始值的一根	Root[f(x),a]
多項式 $f(x)$ 的極值	找出多項式 $f(x)$ 的所有極值發生的點	Extremum[f]
圓錐曲線 c 的頂點		Vertex[c]

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
複數 A 的主幅角		$\theta = \arg(A)$
數列	列出 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的前十項	Sequence[(n,(1/2)^n),n,1,10]
取出集合 list 中的第 k 個元素		Element[list,k]
刪除集合 list 中未定義的元素		RemoveUndefined[list]
	計算集合 list 中，滿足條件式的元素	Countif[條件,list]
	附加物件在集合 list 的前面	Append[物件,list]
	附加物件在集合 list 的後面	Append[list 物件]
和		Sum[list]
算術平均數		Mean[list]
中位數		Median[list]

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
眾數		Mode[list]
$\sum_{i=1}^n x_i$		MeanX[點集合 list]
$\sum_{i=1}^n y_i$		MeanY[點集合 list]
$\sum_{i=1}^n x_i^2$		SigmaXX[點集合 list]
$\sum_{i=1}^n y_i^2$		SigmaYY[點集合 list]
$\sum_{i=1}^n x_i y_i$		SigmaXY[點集合 list]

高中數學常使用的代數指令

主題	動作、數學式	指令列語法(輸入完畢後按 Enter 執行)
$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2$		Sxx[點集合 list]
$\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2$		Syy[點集合 list]
$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$		Sxy[點集合 list]
相關係數		CorrelatioCoefficient[點集合 list]
相關係數		CorrelatioCoefficient[list1,list2]
迴歸直線		FitLine[點集合 list]
直方圖		Histogram[list1(範圍界限),list2(高度)]
直方圖		Histogram[list1(範圍界限),list2(原始資料)]
長條圖		BarChart[list1(位置),list2(高度),w(長條寬度)]
長條圖		BarChart[起始值 a,終止值 b,長條高度 f(k),參數 k,數值 k1,數值 k2,間隔值 s]

使用**GeoGebra**設計教學單元活動

輕鬆上手的單元

1. 多項式
2. 指數與對數
3. 三角函數
4. 圓錐曲線
5. 微積分

使用**GeoGebra**設計教學單元活動

較不易設計的單元

1. 排列與組合
2. 機率與統計
3. 數列與級數
4. 空間概念
5. 空間向量
6. 矩陣與行列式
7. 三角測量

實例分享

1. 微積分
2. 指數與對數
3. 空間向量
4. 三角測量
5. 重複組合

微積分教案設計理念

1. 貼圖的應用
2. 分段函數的應用
3. 黎曼和的觀察
4. 立體圖形的繪製

指數與對數教案設計理念

1. 如何讓電腦上呈現的文字與老師的板書一模一樣？
→ 動態文字的使用
2. 什麼樣的演算法(Algorithm)才正確？
→ 不斷的嘗試尋找錯誤
3. 如何運用動態幾何強化指數函數與對數函數圖形的概念。

空間向量教案設計理念

1. 師生容易上手
2. 物件屬性進階圖層與顯示物件的條件
3. 空間物件中的實線與虛線
4. 空間物件的著色
5. 最佳視角的選取
6. 虛擬實境與動態模擬
7. 動態文字

從一位資深數學教師談起：

- (1) 空間概念對高中生而言就是抽象
- (2) 解三角測量題目時，學生不會畫圖，以致無法解題。
- (3) 我們能不能使用電腦輔助教學，讓學生更能了解問題，進而解決問題。

三角測量教案設計理念

1. 使用者的角度
(老師與學生)
2. 平面測量
(船與水雷、颱風的暴風半徑)
3. 虛擬立體測量
(利用圖片)
4. 立體測量
(3D座標架)

找出適當背景圖

1. Google 圖片
2. 專業用圖網站
3. Open Clip Art

<http://www.openclipart.org/>

或<http://libreoffice-na.us/English-3.4-installs/artwork.html>

製作方法

1. 找出人、飛機、汽車、船的向量圖，並使用影像軟體去背處理。
2. 圖形的平移與旋轉。
3. 利用滑竿、按鈕、輸入框、勾選框做動態處理。
(注意小數點位數、增量與滑竿速度)
4. 圖層(數字越小越下面)

重複組合教案設計理念

- (1) 配合貼圖
- (2) 讓學生動手操作
- (3) 動態模擬

我的靈感從那裡來？

1. 看書
2. 教學經驗
3. 數學老師之間的討論交流
4. 生活周圍
5. 虛擬實境
6. *Geogebra*論壇
<http://www.geogebra.org/forum/viewforum.php?f=2/>
7. 國內外相關網站

Geogebra 4.9版的3D功能

1. 4.9版為測試版，有bug是正常的。
2. 平面可以輸入指令： $2x-y+z=1$
3. 直線可以輸入指令
 $\text{Line}[\langle \text{point} \rangle, \langle \text{direction vector} \rangle]$
4. 示例

教育部高中數學學科中心 資訊融入教學組指導教授

1.國立台灣師範大學數學系 陳創義教授

<http://140.122.140.2/~cyc/>

2.國立台灣師範大學數學系 左台益教授

<http://science.math.ntnu.edu.tw/ELME/teacher.htm>

3.國立清華大學數學系 全任重教授

<http://www.math.nthu.edu.tw/~jcchuan/>

4.國立交通大學通識中心 陳明璋教授

教育部高中數學學科中心 資訊融入教學組成員

羅東高中 官長壽老師 <http://120.101.70.8/longlife/>

華江高中 吳秉鋒老師 <http://wu43.net/Cabri3D>

陽明高中 羅驥韡老師
<https://sites.google.com/a/ymsh.tp.edu.tw/geogebra/>

楊梅高中 許技江老師 <http://teach.ymhs.tyc.edu.tw/t1086/>

竹南高中 李政豐老師

錦和高中 陳禾凱老師

建國中學 黃世穎老師

泰北高中 藍邦偉老師 <http://w2.tpsh.tp.edu.tw/math0128/index.htm>

謝謝指教