

高中職資訊科技融入教學以廣義角三角函數為例

1. 摘要

本文主旨在闡述以自由軟體 Geogebra 融入高中職的數學科教學，對於十二年國民義務教育中的十年級至十二年級的高級中學與職業學校學生，由於教學對象範圍的差異增大，將資訊科技融入教學，以配合差異化教學的精神，變為我們首要的考慮方向。本文中舉出 99 課綱高中數學第三冊第一章的廣義角三角函數與高職數學 B 第一冊第二章三角函數，將資訊融入教學中並配合差異化教學，在達到同一教學目標的教案設計，使得全班同學，配合不同的 Geogebra 程式與平行作業，要求學生完成練習，進而達到精熟、普通、待加強等三段學生在評量時成績差異不大的效果，全面照顧並鼓勵學生的受教權。

2. 研究背景

2.1 資訊時代來臨

2.1.1 電腦與網際網路的普及

2.1.2 平板與手持裝置

2.1.3 年輕人的生活與資訊設備密不可分

2.1.4 電腦輔助數學教學的必要性

現在已經不是要不要用電腦來輔助教學，而是如何使用？何時使用？(1)

有使用 Geogebra 的實驗組高中學生，與對照組學生相比，對函數的觀念知識 (conceptual knowledge) 與程序知識 (procedural knowledge) 都有明顯的統計差異。(2)

2.1.5 教育環境的改變

2.2 數學教學與軟體

2.2.1 什麼是 Geogebra?

GeoGebra 是一套由 Java 程式語言所開發、免費和跨平台的動態數學自由軟體。它是由美國佛羅里達州亞特蘭大學的數學教授 Markus Hohenwarter 及一個國際程式設計團隊所共同開發，設計的軟體，GeoGebra 就是「幾何 Geometry」加「代數 Algebra」的意思。它可以用在幾何、代數、微積分與統計等領域。

由於 Java 是一個跨平台的語言，所以 GeoGebra 可以在不同的系統上執行，例如 Windows、MacOS、Linux 等系統；較新版本的 GeoGebra 開始使用 HTML5，所以目前在 iPad、Android 或這類的平板電腦上亦有測試版可執行，Google Chrome 上也有 GeoGebra 的 App，但目前功能還很有限。

這套軟體曾經獲得許多項國際性的大獎，包括歐洲及德國教育軟體大獎。另一方面，GeoGebra 為一套動態的幾何系統。你可以用點、向量、線段、直線、多邊形、圓錐曲線、和函數來作圖，事後你還可以改變它們的屬性，並隨後動態修改。另一方面來說，你也可以直接輸入方程式或座標，所以 GeoGebra 也有處理變數的能力。例如數字、角度、向量、或是點座標。它也可以對函數作微分與積分，找出方程式的根或計算函數的極大極小值。

GeoGebra 視窗有一個「代數區」、「幾何區」(也稱為「主繪圖區」)、一個「副繪圖區」、一個試算表與一個運算區；可以任意切換選擇需要的視窗。目前的版本是 4.2.60。

2.2.2 為什麼選擇 GeoGebra?

因為 GeoGebra 是自由軟體，依據 GNU General Public License 條約，在非商業用途下，可以免費使用並散佈 GeoGebra。每個老師與同學都可以在家自行下載使用。目前高中數學學科中心、國家教育研究院、國立台灣師範大學國立政治大學等學校都在推廣。

2.2.3 為什麼選擇三角函數這個單元?

2.2.4 研究目的

2.3 研究對象的特色

2.3.1 國中的基礎

2.3.2 未來的生涯發展規劃

2.3.3

3. 方法

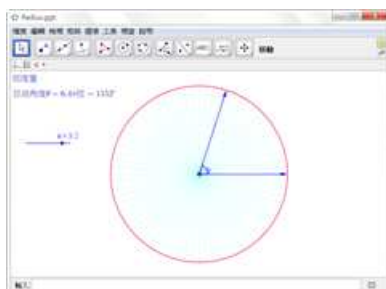
3.1 教學方法：電腦輔助教學

3.1.1 教學理念

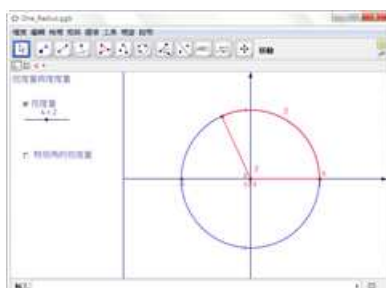
我們考慮以廣義角三角函數為中心探討單元，先將 Geogebra 的相關程式先寫好，並放在個人網頁上 <http://w2.tps.sh.tp.edu.tw/math0128/index.htm>。並借用高中數學學科中心資訊融入教學組吳秉鋒老師製作的 Flash 三角函數遊戲來進行實驗組教學。而對照組完全依傳統的板書教學。

3.1.2 教學網頁

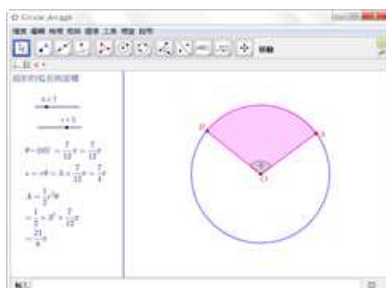
徑度量



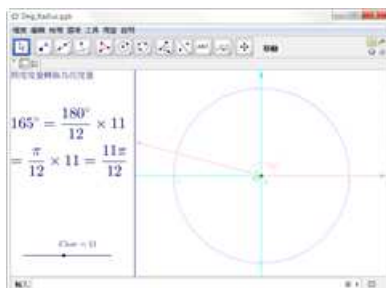
徑度量與度度量



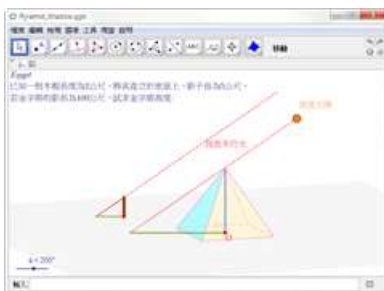
扇形的弧長與面積



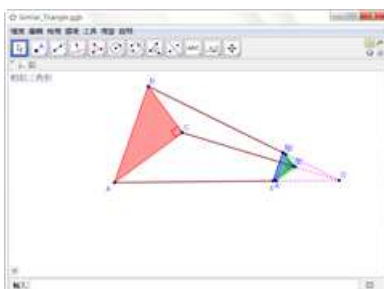
如何將度度量轉換為徑度量



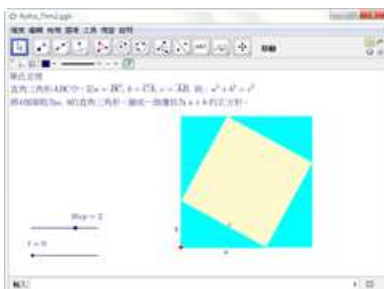
三角函數的由來



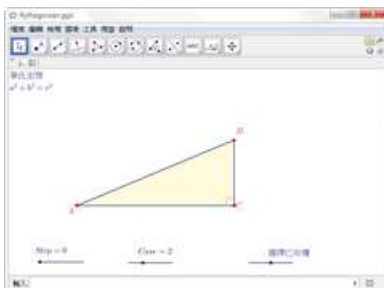
相似直角三角形的三邊比



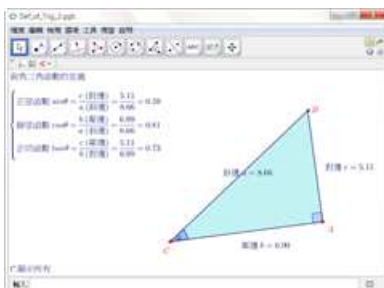
畢氏定理(1)



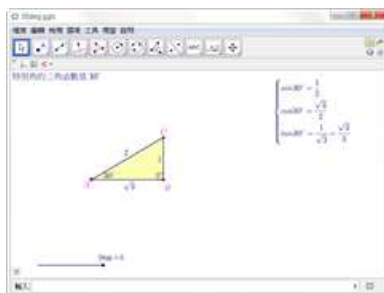
畢氏定理(2)



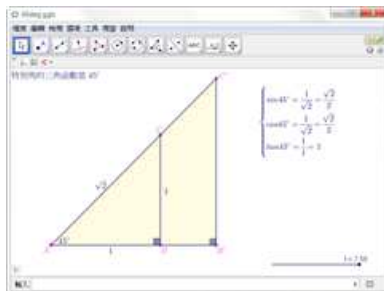
銳角三角函數的定義



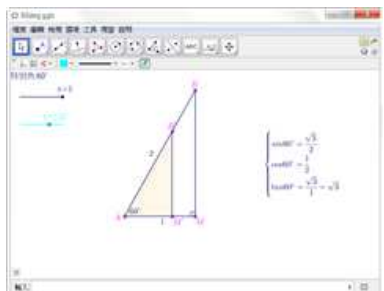
特別角的三角函數值(1) 30°



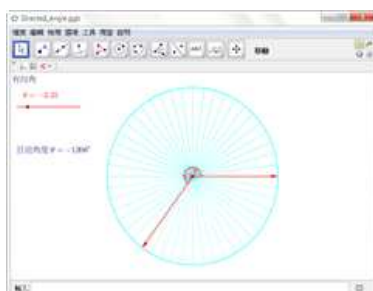
特別角的三角函數值(2) 45°



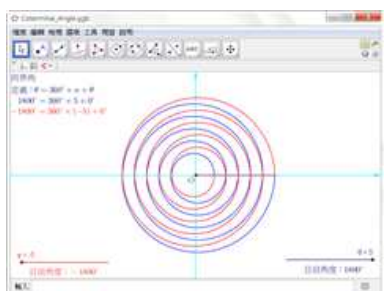
特別角的三角函數值(3) 60°



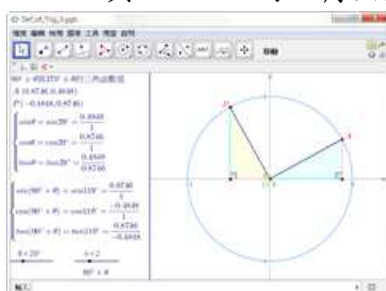
有向角



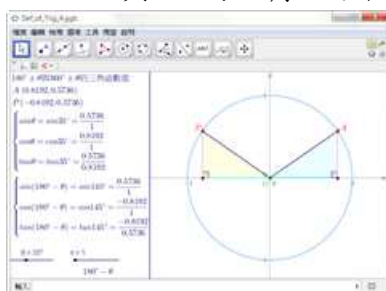
同界角



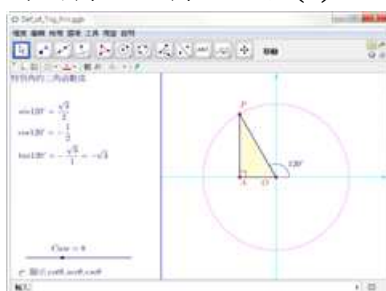
90° ± θ 與 270° ± θ 的三角函數值



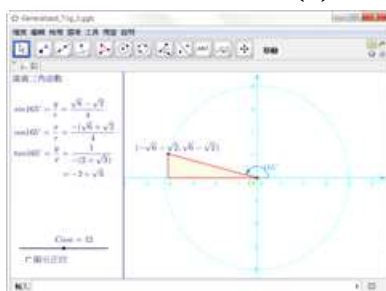
180° ± θ 與 -θ 的三角函數值



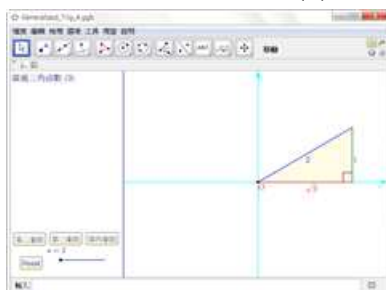
特別角的三角函數值(1)



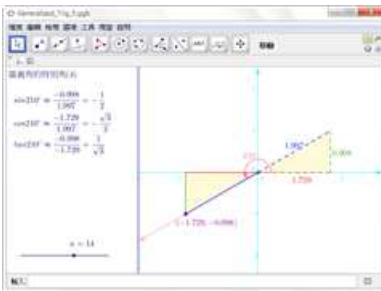
特別角的三角函數值(2)



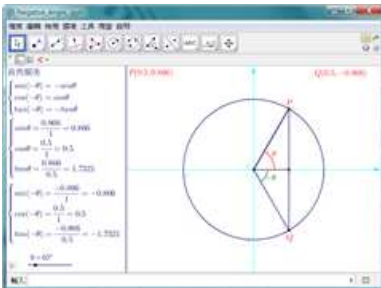
特別角的三角函數值(3)



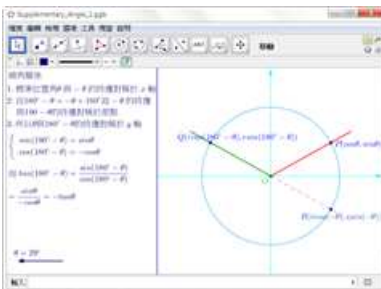
特別角的三角函數值(4)



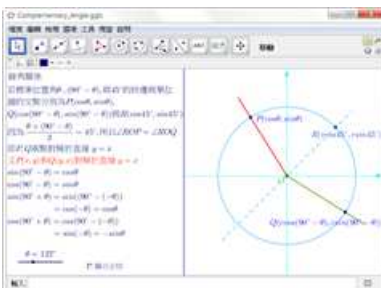
負角關係



補角關係



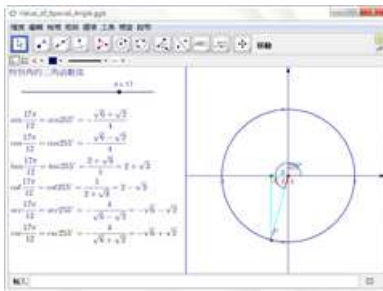
餘角關係



270° ± θ 的變化



特別角的三角函數值的綜合整理



3.1.3 遊戲

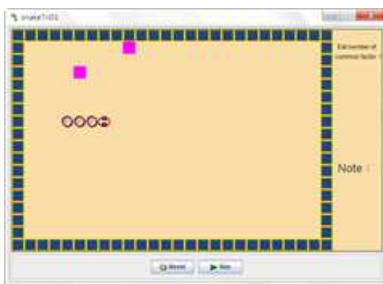
拼圖遊戲看三角函數的公式



特別角的三角函數值之貪吃蛇(1)



特別角的三角函數值之貪吃蛇(2)



3.2 研究設計：

3.2.1 研究對象

目前計畫以泰北高中應用外語科日文組一年甲班的學生當實驗組，日文組一年乙班當對照組，兩班為常態編班，人數分別為 34 人與 27 人。每周數學課時數皆為 4 小時。

3.2.2 測量變項

□ 學生學習基本資料問卷調查

學生性別、課後學習時數、有否補習、打工、

□ 學業表現

授課時間依高職數學課綱(B)與本校實際情形總共 10 小時；授課單元包含 Sec2-2 三角函數的定義與基本性質與 Sec2-3 任意角的三角函數。預計在 10 月 24 日日一甲班進行前測，10 月 25 日日一乙班進行前測。我們配合雙向細目表，擬定了前測的試卷如附。最後我們以第一次段考，前測，Sec2-2 後測，Sec2-3 後測四次考試來分析成績。

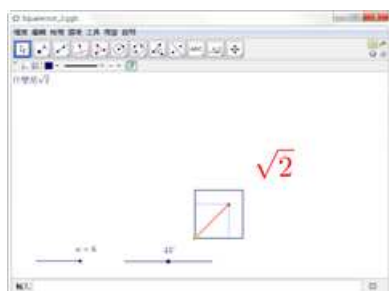
第一段考的範圍是直線方程式。內容包含了 Sec1-1 直角坐標、Sec1-2 距離公式與分點坐標、Sec1-3 直線的斜率與方程式、Sec1-4 函數圖形。

前測我想測驗的是先備知識與國中學過的三角函數的相關知識，配合 Bloom 的認知領域教學目標，由最簡單到最複雜的六個層次，依序為知識(Knowledge)、理解(Comprehension)、應用(Application)、分析(Analysis)、綜合(Synthesis)、評鑑(Evaluation)。取前三個層次作為測驗的三個認知層次。

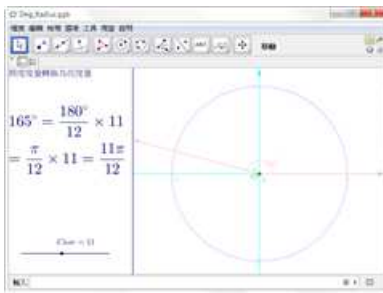
數學知識 認知層次	先備知識	三角函數相關知識
知識 (Knowledge)	1	2
理解 (Comprehension)	5,6	3,4
應用 (Application)		7(1)(2) 8(1)(2)

前測成績出來後修正教學策略，四分之三的同學都不會 $\sqrt{2}$ ，過半的同學不熟悉度度量轉換為徑度量，所以我採用補救教學，又做了兩支對應的 Geogebra，放在網頁上。

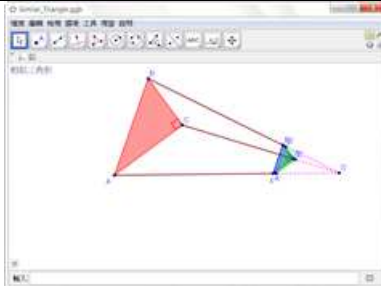
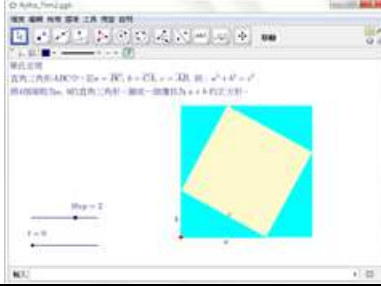
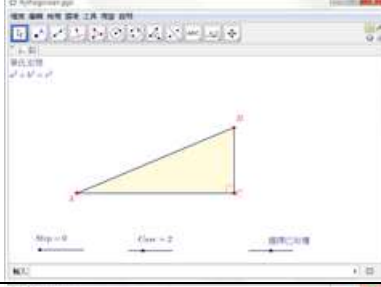
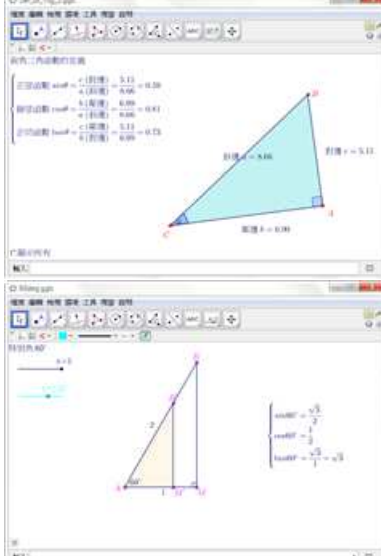
什麼是 $\sqrt{2}$

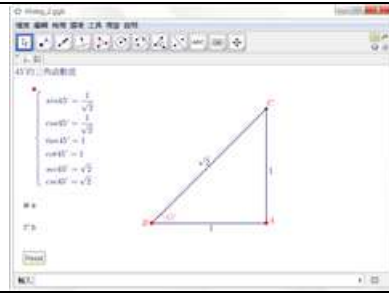
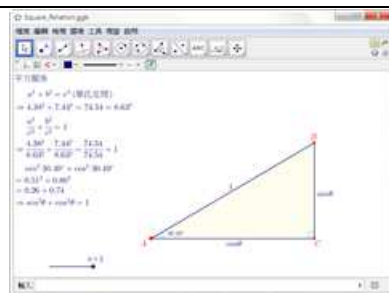
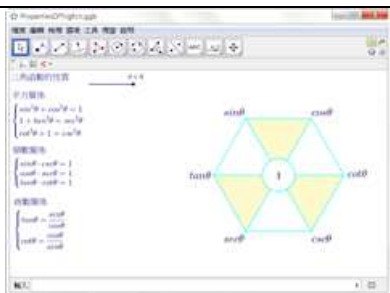


將度度量轉換為徑度量



Sec2-2 後測：

教學目標	對應到的 GeoGebra 網頁	題目
1. 在直角三角形中，已知某兩邊，可以用畢氏定理求出第三邊。		2,3,4,5
2. 已知直角三角形的三邊，可以寫出 θ 角的 6 個三角函數值		1
3. 已知直角三角形的某兩邊，可以寫出 θ 角的 6 個三角函數值		2,3,4,5
4. 能求出 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 或 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ 的六個三角函數值		6,7

		
5. 能以四則運算特別角的三角函數值		8
6. 能處理三角恆等式，即平方關係、商數關係、餘角關係與倒數關係	 	9.10, 11

數學知識 認知層次	教材內容					
	1	2	3	4	5	6
知識(Knowledge)						
理解(Comprehension)						
應用(Application)						

教材內容：
1. 了解相似的直角三角形三邊比為定值
2. 銳角三角函數的定義
3. 已知一個三角函數，可以使用畢氏定理推出其他五個三角函數值
4. 能求出 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 或 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ 的六個三角函數值
5. 能對三角函數值進行四則運算
6. 三角恆等式（平方關係、商數關係、倒數關係、餘角關係）

3.3 資料分析方法

3.3.1 單變項分析

針對實驗組與對照組兩組學生分別就知識(Knowledge)、理解(Comprehension)、應用(Application)、三個面向的知識進行 2 sample t test。

3.3.2 多變項分析

控制其它可能的干擾變項，諸如性別、學習態度與行為等，針對實驗組與對照組兩組學生分

別就知識(Knowledge)、理解(Comprehension)、應用(Application)、三個面向的知識進行多變項分析 2 sample t test。

4. 附件資料

4.1 第一段考

臺北高中102學年度第一學期商職一年級數學第一段考試題

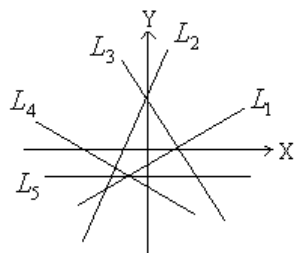
班級：_____ 姓名：_____ 座號：_____ 號

一、選擇題：(每題五分)共計五十分

1. 已知點 $P(-a, b)$ 在第三象限內，則點 $Q(ab, a-b)$ 在第幾象限內？
(A) 第一 (B) 第二 (C) 第三 (D) 第四 象限內。
2. 若 $a > 0 > b$ ，則點 $P(ab^3, a^2b)$ 在 (A) 第一 (B) 第二 (C) 第三 (D) 第四 象限內。
3. 若 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(5, 4), B(6, -3), C(3, -2)$ ，則 $\triangle ABC$ 為何種三角形？
(A) 等腰 (B) 等邊 (C) 直角 (D) 等腰直角 三角形。
4. 承第3題 $\triangle ABC$ 的周長為？(A) $5+3\sqrt{10}$ (B) $10\sqrt{2}+\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}+3\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{2}+4\sqrt{10}$ 。
5. 設數線上兩點 $A(2x-1), B(2)$ ，若 $\overline{AB}=7$ ，則 $x=?$ (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5。
6. 設平面上兩點 $A(-2, 4), B(1, k)$ ，若 $\overline{AB}=5$ ，則 k 可為 (A) 1 (B) 3 (C) -3 (D) 8。
7. 若 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(4, 1), B(5, -5), C(-3, 1)$ ，則 $\triangle ABC$ 的重心坐標為？
(A) (6, 0) (B) (2, -1) (C) (3, 1/2) (D) (0, 0)
8. 設一直線 $L_1: 3x+4y-12=0$ 與 x, y 軸所圍的三角形面積為？
(A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 18 平方單位。
9. 設平面上 $A(-1, -1), B(a+1, 0), C(5, a)$ 相異三點 ($a < 0$)，若此三點共線，則 $a=$
(A) -2 (B) -3 (C) -4 (D) -5
10. 兩平行線 $L_1: 5x-12y-14=0, L_2: -5x+12y-38=0$ ，則 $d(L_1, L_2)=?$
(A) 4 (B) 13 (C) 24 (D) 52

二、填充題：(每格五分)共計 四十分

1. 求滿足下列條件的直線方程式：
(A)過 $A(-3, 2), B(1, 5)$ 兩點。(B)過 $A(2, -1)$ 且在 x 軸上的截距為 -2。(C)在 x, y 軸上的截距分別為 $\frac{3}{2}, -3$ 。
2. 如圖：圖中 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 的斜率分別為 m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 則由大而小排列為_____。



3. 已知坐標平面上三點 $A(5,2)$, $B(-3,4)$, $C(1,-1)$, 若四邊形 $ABCD$ 為一平行四邊形, 則 D 點坐標為_____。
4. 平面上相異兩點 $A(5,-2)$, $B(3,4)$, 則 $\overline{AB}$ 之中垂線方程式為_____。
5. 已知 $A(4,5)$, $B(-12,1)$, 且 $P \in \overline{AB}$, 又 $\overline{BP} = 3\overline{AP}$, 則 P 點坐標為_____。
6. 若 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(2,-1)$, $B(-2,6)$, $C(0,0)$, 則 $\overline{BC}$ 邊上之中線長為_____。

三、計算題：(每小題五分) 要列式計算只寫答案者不予計分

1. 若已知一點 $A(-4,1)$ 及一直線 $L_1: 2x - y + 3 = 0$, 則

(A) 過 A 點與 L_1 平行的直線方程式為何？

(B) 過 A 點與 L_1 垂直

的直線方程式為何？

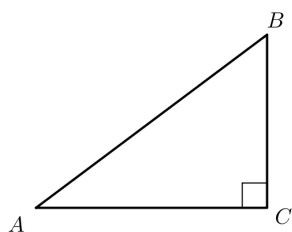
4.2 前測

高職數學 B 第一冊 Sec2-2、Sec2-3 前測

日一 ____ 班 座號：____ 號 姓名：____ 分數：____

1. 已知 $x > 0$ 且 $x^2 = 2$ ，試求 x 之值。

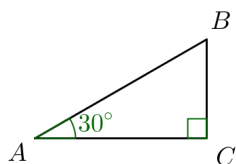
2. 如圖，已知直角三角形 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ，且 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ，試敘述畢氏(勾股)定理。



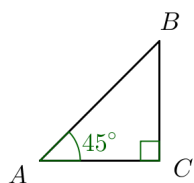
3. 已知直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 4$ ，試求 $\overline{CA}$ 長。

4. 已知直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 2$ ，試求 $\overline{BC}$ 長。

5. 如圖，直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，試求 $\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB}$ 。



6. 如圖，直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，試求 $\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB}$ 。



7. 試將下列徑度量換為度度量：(1) $\frac{\pi}{4}$ ；(2) $\frac{5\pi}{3}$ 。

8. 試將下列度度量換為徑度量：(1) 120° ；(2) 150° 。

4.3 後測 Sec2-2

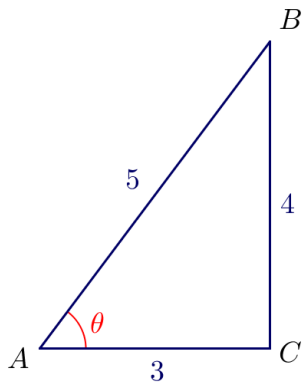
高職數學 B 第一冊 Sec2-2 後測

日一 ____ 班 座號：____ 號 姓名：____ 分數：____

每格四分 請將算式寫在空白處，答案填在答案欄

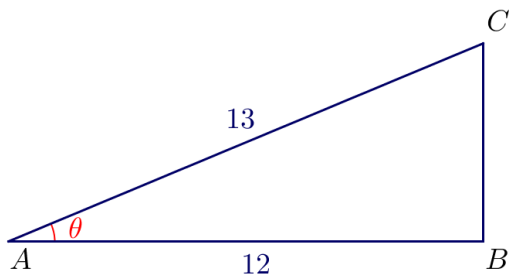
1. 如下圖所示，直角三角形 ABC 中，已知 $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=4$ 、 $\overline{CA}=3$ ，試求： $\sin \theta = \underline{(1)}$ ，

$$\cos \theta = \underline{(2)}，\tan \theta = \underline{(3)}。$$



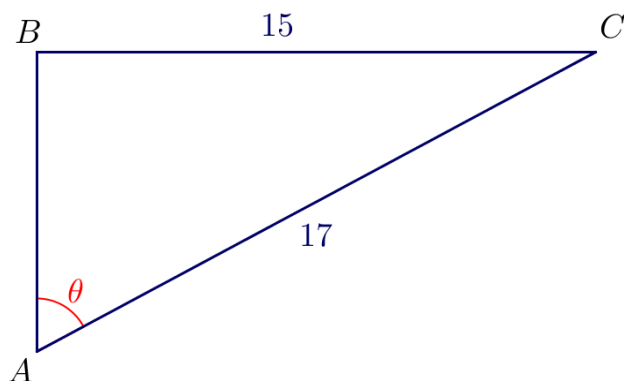
2. 如下圖所示，直角三角形 ABC 中，已知 $\overline{AB}=12$ 、 $\overline{CA}=13$ ，試求： $\cos \theta = \underline{(4)}$ ， $\tan \theta = \underline{(5)}$ ，

$$\csc \theta = \underline{(6)}。$$



3. 如下圖所示，直角三角形 ABC 中，已知 $\overline{BC} = 15$ 、 $\overline{AC} = 17$ ，試求： $\sin \theta = \underline{(7)}$ ，

$\cot \theta = \underline{(8)}$ ， $\sec \theta = \underline{(9)}$ 。



4. 直角三角形 ABC 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ，且 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 1$ ，試求： $\overline{BC} = \underline{(10)}$ ， $\cos A = \underline{(11)}$ ，

$\tan B = \underline{(12)}$ 。

5. 直角三角形 ABC 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ，且 $\sin A = \frac{7}{25}$ ，試求： $\cos A = \underline{(13)}$ ， $\tan A = \underline{(14)}$ ，

又若 $\overline{AB} = 50$ ，則 $\overline{BC} = \underline{(15)}$ 。

6. 試求下列特別角的三角函數值： $\sin 30^\circ = \underline{(16)}$ ； $\tan 45^\circ = \underline{(17)}$ ； $\sec 60^\circ = \underline{(18)}$ 。

7. 試求下列特別角的三角函數值： $\cos \frac{\pi}{4} = \underline{(19)}$ ； $\csc \frac{\pi}{6} = \underline{(20)}$ ； $\cot \frac{\pi}{3} = \underline{(21)}$ 。

8. $\csc^2 60^\circ + \tan 30^\circ \times \csc 60^\circ - \sec^2 45^\circ = \underline{(22)}$ 。

9. $\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ + \csc^2 33^\circ - \cot^2 33^\circ = \underline{(23)}$ 。

10. 已知 θ 為銳角，且 $\tan \theta = 2$ ，則 $\frac{2 \sin \theta + \cos \theta}{3 \cos \theta + 4 \sin \theta} = \underline{(24)}$ 。

11. $\cos^2 25^\circ \times \csc^2 65^\circ = \underline{(25)}$ 。

答案欄

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.
10.	11.	12.
13.	14.	15.
16.	17.	18.
19.	20.	21.
22.	23.	24.
25.		

4.4 後測 Sec2-3

4.5 問卷調查

各位同學：

大家好，謝謝你(妳)參予我們的研究！這份問卷的目的，是希望能瞭解各位同學的數學學習態度，以作為本研究的參考。我們會對本資料的內容絕對保密，請放心回答。再次謝謝你(妳)的合作與協助。

請在每題的五個選項中，勾選一個合適的答案，

如果你認為問題的敘述你非常同意，請在非常同意的位置打「○」。

如果你認為問題的敘述你同意，但不是非常同意，請在同意的位置打「○」。

如果你認為問題的敘述你既不是贊成也不是反對，請在無意見的位置打「○」。

如果你認為問題的敘述你不同意，但不是非常不同意，請在不同意的位置打「○」。

如果你認為問題的敘述你非常不同意，請在非常不同意的位置打「○」。

1. 若對題目的敘述不了解，可以不作答。

5. 參考文獻

1. Freiman V, Kadijevich D, Kuntz G, Pozdnyakov S, & Stedøy I (2009) Technological Environments beyond the Classroom. *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom*, New ICMI Study Series, eds Taylor PJ & Barbeau EJ (Springer US), Vol 12, pp 97-131.
2. Zulnaidi H & Zakaria E (2012) The Effect of Using GeoGebra on Conceptual and Procedural Knowledge of High School Mathematics Students. *Asian Social Science* 8(11).

6. 附錄